線型代数 I 要綱 #2 　　2006–4–21 　　河野

1.3 n 項数ベクトル空間

高校時代のベクトルは幾何学的なものとして導入された。我々も今まで扱ったのはそれであった。幾何的なものに固執している限り一般次元に拡張する事は易しくない。しかし代数的にみると平面のベクトルは 2 個の実数の組で表され，空間のベクトルは 3 個の組で表されている。そこに着目して一般化を行う。即ち平面のベクトルが実数を 2 個並べた $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と表され，空間のベクトルが実数を 3 個並べた $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と表される事に注目して，実数を n 個並べた $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 項数ベクトルと定義する。

定義 1.9 n を自然数とする。n 個の実数 $a_1, \dots, a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と書いて n **項数ベクトル**と言う。簡単に (x_i) とも略記する。ベクトルは普通太文字で ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{v}$ 等) 書き表す。2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)$ と $\boldsymbol{y} = (y_i)$ が等しいとは，各 i $(i = 1, \dots, n)$ に対し $x_i = y_i$ が成立する時と定義する。n 項 (列) 数ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と書いて n **項数ベクトル空間**と言う。行ベクトルも同様に考えられるが我々は普通列ベクトルを考え，以下列ベクトルとはことわらない事にする。

3 項数ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 40 \end{pmatrix}$ がある。4 項数ベクトルの例として $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, 5 項数ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 506 \\ 365 \\ 123 \\ 290 \\ 745 \end{pmatrix}$ などが考えられる。

n 項数ベクトルには和と実数倍が以下の様に定義できる。

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

(x_i), (y_i) という表記を用いると，

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \qquad \alpha(x_i) = (\alpha x_i)$$

表せる。

高校で学んだベクトルでは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ という書き方でもよかったが n 項数ベクトルになると添字付きの表現でなければ表されない場合も発生する。

2 項，3 項数ベクトルでも取り上げたが，次が成立する。

命題 1.10 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を $\mathbb{R}^n$ の元とし α, β を実数とする時次が成立する。

(1) [**結合法則**] $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

(2) [**交換法則**] $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(3) 特別な元 $\mathbf{0}$ (零ベクトル又は零元と呼ばれる) が存在して任意のベクトルに対し $\boldsymbol{v}+\mathbf{0} = \boldsymbol{v}$ となる。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しあるベクトル $\boldsymbol{v}'$ が存在して ($\boldsymbol{v}$ の逆元という) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}' = \mathbf{0}$ となる (普通 $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}$ と表す)。

(5) [**分配法則**] $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$

(6) [**分配法則**] $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(8) $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

幾つかを証明し残りは演習問題としておく。

証明　(1) を示そう。実数に関しこのタイプの結合法則は知られているものとする。つまり任意の実数 a, b, c に対し $a+(b+c) = (a+b)+c$ の成立は仮定する。$\boldsymbol{u} = (u_i), \boldsymbol{v} = (v_i), \boldsymbol{w} = (w_i)$ とする。$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (u_i+v_i)$ であるので，

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = (u_i+v_i)+(w_i) = ((u_i+v_i)+w_i) = (u_i+(v_i+w_i)) = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$$

よって示された。次に (3)。$\mathbf{0}$ をすべての成分が 0 であるベクトルとすると，この性質を満たす事はすぐ分かる。[1] ∎

実数 $\mathbb{R}$ は 1 項数ベクトル空間 $\mathbb{R}^1$ と同一視できる。実数 x と 1 項数ベクトル (x) は厳密には同じものではないが同一視しても混乱は起こらないので以下そう考える。

演習問題 1.6　命題 1.10 を証明せよ。

---

[1] この証明が命題 1.1 の証明とほぼ同じである事に気がついた人もいるかもしれない。成分の個数が異なるだけで示す方法は全く同じである。

1.4 計量ベクトル空間

この節では内積の定義されたベクトル空間を考える。最初に平面および空間のベクトルの内積と長さについて復習しよう。

平面のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対しその**内積** (*inner product*) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

で定義した。このときベクトル $\boldsymbol{x}$ の**長さ**は

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

と表される。

空間のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対しその**内積** (*inner product*) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

で定義する。このときベクトル $\boldsymbol{x}$ の**長さ**は

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

と表される。

命題 1.11 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 等を平面または空間のベクトル，a を実数とする。このとき次が成立する。
(1) [**正値性**] 任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ となる。また $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る。
(2) [**対称性**] 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成立する。
(3) [**線型性**]
 (1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成立する。
 (2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 a に対し $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。
(4) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とする。ただし $\boldsymbol{x}$ または $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{0}$ のときは $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ と定義する。このとき $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$ が成立する。特に $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交する必要十分条件は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である。

演習問題 1.7 命題 1.11 の内積の性質 (2)，(3) から 2 番目の成分に関する線型性，すなわち
(5) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ ，および
(6) 任意の実数 α と任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
が成立することを示せ。

n 項数ベクトルに対し内積を定義する。

定義 1.12 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対しその**内積** (*inner product*) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

で定義する。またベクトル $\boldsymbol{x}$ の**長さ**を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

で定義する。

命題 1.11 と同じ様に次が成立する。

命題 1.13 (1) [**正値性**] 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ となる。また $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る。

(2) [**対称性**] 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成立する。

(3) [**線型性**]

1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

演習問題 1.8 命題 1.13 を示せ。

演習問題 1.9 演習問題 1.7 と同様に $\mathbb{R}^n$ の場合も 2 番目の成分に関して線型性をもつ。すなわち次が成立する。この事を証明せよ。
(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ が成立する。
(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

命題 1.11 の (4) に対応する n 項数ベクトルの命題を考えたい。n が 4 以上の場合，n 項数ベクトルの間には角度というものが定義されていない。そこで角度というものを定義したい。そのために次の定理を必要とする。

定理 1.14 [Schwarz(シュワルツ) の不等式] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$$

が成立する。

証明 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とする。X を実数を動く変数と考え，$(x_1X + y_1)^2$ を考えると，$(x_1X + y_1)^2 \geqq 0$ が成立している。各 i $(i = 2, \ldots, n)$ に対しても同様に $(x_iX + y_i)^2 \geqq 0$ が成立している。これを $i = 1, \ldots, n$ まで足合わせると，

$$(x_1X + y_1)^2 + \cdots + (x_nX + y_n)^2 \geqq 0$$

が得られる。これを展開すると

$$(x_1^2 + \cdots + x_n)X^2 + 2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)X + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) \geqq 0$$

となる。任意の実数 X に対し上式が成立しているので，2 次方程式の判別式は 0 以下である。よって

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \leqq (x_1^2 + \cdots + x_n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

をえる。これが定理の式である。 ∎

演習問題 1.10 Schwarz の不等式から次の 3 角不等式を導け; 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

が成立する。

この定理を用いて 2 つのベクトルの間の角度を定義しよう。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ とする。ただし，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ としておく。このとき Schwarz の不等式より

$$-1 \leqq \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \leqq 1$$

が成立している。このとき $0 \leqq \theta \leqq \pi$ となる θ で

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}$$

となるものが唯 1 つ存在する。このとき θ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角と定義する。

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のときは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{2}$ と定義する。この様に定義すると命題 1.11 の (4) は $\mathbb{R}^n$ においても成立する事が分かる。

演習問題 1.11

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 4 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 5 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

定義 1.15 n 項数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ では，角度およびあるが，長さを定義する事ができる。$\mathbb{R}^n$ に限らなくても，実数上のベクトル空間には $\mathbb{R}^n$ の制限として内積を考えることができる。この様に内積が定義されているベクトル空間を**計量ベクトル空間**と呼ぶ。

$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を計量ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトルとする。これらのベクトルの長さがすべて 1 であり，お互いに直行しているとき，これらのベクトルの組を**正規直交系** (*orthonormal system*) という。