線型代数 I 要綱 #3

2006–4–28　　河野

2　行列と連立 1 次方程式

ここでは行列について簡単に学んだ後連立 1 次方程式について行列を用いて考える。行列については高校で学んでいるものとして講義するので，学んでいない人は自分でギャップを埋めるよう自学してください (勿論わからない所は質問に来てください)。

2.1　2 次行列

実数を長方形に並べてひとまとめにしたものを**行列**という。通常は括弧でくくって

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

の様に表す。

一般の行列に m 行 n 列の行列を考えよう。行列構成する各実数を**成分**といい，i 行 j 列にある成分を (i,j) 成分という。(i,j) 成分が a_{ij}[(1)]である行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書く。この行列 A を (a_{ij}) と略記することもある。慣れればこの方が簡単である。m 行 n 列の行列を (m,n) 行列または $m \times n$ 行列ともいう。(n,n) 行列を n 次行列という。先ほどの例で言うと，最初の例は $(2,2)$ 行列または 2×2 行列または 2 次行列であり，2 番目の例は $(2,3)$ 行列または 2×3 行列であり，最後の例は $(3,3)$ 行列または 3×3 行列または 3 次行列でである。

2 つの行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ が等しい事をともに同じ型 ((m,n) タイプ) の行列であり，任意の i,j に対し $a_{ij} = b_{ij}$ が成立する事と定義する。

この節では 2 次行列について学ぶ。2 つの 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ の和 $A+B$ を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する。実数の和と同様に

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= (A+B)+C \qquad &(\text{結合法則}) \\ A+B &= B+A \qquad &(\text{交換法則}) \end{aligned}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

[(1)] ここで a_{ij} は 2 重添え字であることに注意。例えば a_{11} は 11 番目という意味ではなく，$(1,1)$ 成分を意味する。

が成立する。すべての成分が 0 である 2 次行列を**零行列** (*zero matrix*) といい O で表す：

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任意の 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し

$$A + O = A$$

が成立する。

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と実数 α に対し，行列の実数倍 αA を

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する。$(-1)A$ を $-A$ と書き，$A - B$ を $A + (-B)$ で定義する。

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対し積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する。なぜこのように定義するかはおいおい分かるであろう。実数の積と同様に

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C && \text{(結合法則)} \\ A(B+C) &= AB + AC && \text{(分配法則)} \\ (A+B)C &= AC + BC && \text{(分配法則)} \end{aligned}$$

が成立する。積に関しては交換法則は成立しない

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を (2 次の) **単位行列** (*unit matrix*) という。任意の行列 A に対し

$$AE = EA = A$$

が成立する

演習問題 2.1　任意の 2 次行列 A と単位行列 E に対し $AE = EA = A$ が成立する事を示せ。
演習問題 2.2　任意の行列 A, B, C に対し $A(B+C) = AB+AC$ 及び $(A+B)C = AC+BC$(分配法則) が成立する事を示せ。

実数の積と行列の積の違いは 2 つある。それ以外は和の法則も含めて実数で成立する法則が成立している。0 に対応するのが零行列 O であり，1 に対応するのが単位行列 E である。違いの 1

つは交換法則が成立しないことであるが，もう 1 つは逆元の存在である。実数 a に対しその逆元 a^{-1} とは $aa^{-1}=1$ となる実数である。実数の場合 $a \neq 0$ であれば，a の逆元は存在する。行列 A に対しては

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

となる行列を A の**逆行列** (*inverse matrix*) という。行列に対しては $A \neq O$(零行列) であっても，逆行列が存在するとは限らない (演習問題 2.4)。

演習問題 2.3 2 次行列 A, B で $AB \neq BA$ となる例を 1 つあげよ。3 次行列 A, B で $AB \neq BA$ となる例を 1 つあげよ。

演習問題 2.4 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないことを示せ。

定義 2.1 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad-bc$ を A の**行列式** (*determinant*) といい $\det(A)$ と書く。

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

と書くこともある。

行列式については次の定理が基本的である。

定理 2.2 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

証明 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A)=ad-bc$,$\det(B)=ps-qr$ である。$AB=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ なので，$\det(AB)=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)=apcq+apds+brcq+brds-(aqcp+aqdr+bscp+bsdr)=adps+bcrq-adqr-bcps=ad(ps-qr)-bc(ps-qr)=(ad-bc)(ps-qr)=\det(A)\det(B)$ となる。■

この定理より次の逆行列の存在に関する定理が得られる。

定理 2.3 2 次行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ必要十分条件は $\det(A) \neq 0$ である。このとき A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。

証明 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおくと，$A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=\det(A)E$ である。$\det(A) \neq 0$ のとき $B=\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ とおくと，$AB=BA=E$ となり，B が A の逆行列であることが分かる。

A の逆用列 A^{-1} が存在するとき $AA^{-1} = E$ なので $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E) = 1$ となり，$\det(A) \neq 0$ が分かる。 ∎

n 次行列に対し行列式を定義し，今まで述べた結果に対応する結果を得ることは線型代数の重要な内容である。これは後期に線型代数 II で学ぶ。

演習問題 2.5　次の行列が逆行列をもつ必要十分条件を求めよ。また逆行列をもつとき，その逆行列を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と 2 項数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の積を次の様に定義する：

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

行列 A に対し $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。これは後で定義する**線型写像** (*linear map*) の例になっている。即ち T_A は次の性質を持つ：

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $T_A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})$ が成立する。

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $T_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T_A(\boldsymbol{x})$ が成立する。

線型写像は線型代数ではベクトル空間とならんで重要な概念である。一般的な議論は後でするが，ここでは長さを変えない平面から平面への線型写像に関して調べる。

$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする。このとき $T_{A(\theta)}$ は原点を中心とする θ 回転になっている。任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $|T_{A(\theta)}(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ が成立する。すなわち $T_{A(\theta)}$ は長さを変えない写像である。$B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とする。$T_{B(\theta)}$ は，原点を通り x 軸との角が $\dfrac{\theta}{2}$ の直線に関する折り返しになっている。任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $|T_{B(\theta)}(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ が成立する。すなわち $T_{B(\theta)}$ は長さを変えない写像である。

定理 2.4 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に関して次は同値である。

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $|T_A(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ が成立する。

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおくとき，$|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 1, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ が成立する。

(4) ある θ に対し $A = A(\theta)$ または $A = B(\theta)$ である。

(5) $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ を A の**転置行列** (*transpose*) とするとき，$A^T A = E$ が成立する。

証明　(1) $\Longrightarrow$ (2)：$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + |\boldsymbol{y}|^2$ 及び $|T_A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})|^2 = |T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})|^2 = (T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})) = |T_A(\boldsymbol{x})|^2 +$

$2(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + |T_A(\boldsymbol{y})|^2$ は常に成立している。(1) を仮定すると，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $|T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|$ 及び $|T_A(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|, |T_A(\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{y}|$ が成立しているので，$|T_A(\boldsymbol{x})|^2 + 2(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + |T_A(\boldsymbol{y})|^2 = |T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + |\boldsymbol{y}|^2$ より $(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が分かる。

(2) $\Longrightarrow$ (3)：$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{a} = T_A(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{b} = T_A(\boldsymbol{e}_2)$ が成立している。よって $|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (T_A(\boldsymbol{e}_1), T_A(\boldsymbol{e}_1)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 1$, $|\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (T_A(\boldsymbol{e}_2), T_A(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 1$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (T_A(\boldsymbol{e}_1), T_A(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0$ が成立する事が分かる。

(3) $\Longrightarrow$ (4)：$\boldsymbol{a}$ は長さ 1 のベクトルなので $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ となる θ が存在する。$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と直交する長さ 1 のベクトルなので $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ となる。前者の場合 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ であり，後者の場合 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ となるので (4) が示される。

(4) $\Longrightarrow$ (5)：$A = A(\theta)$ とすると，$A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるので，

$$
\begin{aligned}
A^T A &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= E
\end{aligned}
$$

となる。$A = B(\theta)$ のときも同様に示す事ができる (演習問題 2.6)。

(5) $\Longrightarrow$ (1)：$A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので $a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 0$ が成立している。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し，$T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$，なので $|T_A(\boldsymbol{x})|^2 = (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x})) = (ax_1 + bx_2)(ax_1 + bx_2) + (cx_1 + dx_2)(cx_1 + dx_2) = (a^2 + c^2)x_1^2 + 2(ab + cd)x_1x_2 + (b^2 + d^2)x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 = |\boldsymbol{x}|^2$ となり，(1) が成立する。 ∎

演習問題 2.6　$A = B(\theta)$ のとき $A^T A = E$ を示せ。

演習問題 2.7　次の行列 A, B に対し AB を計算せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$