線型代数 I 要綱 #4

2006–5–19　　河野

2.2　(m,n) 行列

一般の行列について考えよう。m 行 n 列の行列 ((m,n) 行列，$m\times n$ 行列ともいう) で (i,j) 成分が a_{ij} である行列 A を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書いた。行列 A を (a_{ij}) とも書いた。慣れればこの方が簡単であった。2 つの行列 $A=(a_{ij})$ と $B=(b_{ij})$ が等しい事をともに同じ型 ((m,n) タイプが等しい) の行列であり，任意の i,j に対し $a_{ij}=b_{ij}$ が成立する事と定義し，$A=B$ と書く。

(m,n) 行列全体の集合を $M(m,n)$ で表す。$M(m,n)$ には和と実数倍[1]が次の様に定義できる。

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\in M(m,n)$，$\alpha$ に対し和，実数倍を

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+b_{ij} & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \\ \alpha A &= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で定義する。和とスカラー倍は (a_{ij}) の記号で書くと

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}), \qquad \alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})$$

と書ける。とくに $m=n$ のとき，$M(n,n)$ を $M(n)$ とも書き，その元を n **次 (正方) 行列**と言う。

ここで行列の積について復習しておこう。

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\in M(m,n),\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}\in M(n,p)$ に対しその積 $AB=(c_{ij})$ は

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

と定義されていた。定義から分るよう A の列と B の行の数が等しいときのみ積が定義され，積 AB は (m,p) 行列になる。行列の積は線型代数全体を通じて基本的である。特に 2 重添字を用い

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

[1] これをスカラー倍ということがある。その理由は成分を実数から拡張したときにふれることにする。

ての掛け算が自由にできるようになる事を 1 つの目標として各自取り組んでほしい (演習問題 2.11 参照)。

実数の積と行列の積の違いは 2 次行列のところでも述べたように 2 つある。交換法則が成立しないことと零行列[2]でない行列に対しても逆行列が存在しない場合がある事である。

共通な性質として次の命題 2.5 があげられる。ここで O は成分がすべてゼロである行列 (**零行列**と呼ばれる), E は**単位行列**と呼ばれる次の行列とする：クロネッカーのデルタと呼ばれる記号を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義した時, n 次行列 E を $E = (\delta_{ij})$[3]とする。

命題 2.5 行列のサイズに関して特に書いていないが, 和・積は定義されることを仮定している。

(1) 任意の A, B, C に対し $(A + B) + C = A + (B + C)$

(2) 任意の A, B に対し $A + B = B + A$

(3) 任意の A に対し $A + O = A$

(4) 任意の A, B, C に対し $(AB)C = A(BC)$

(5) 任意の A に対し $AE = A$, 任意の B に対し $EB = B$

(6) 任意の A, B, C に対し $A(B + C) = AB + AC$

(7) 任意の A, B, C に対し $(A + B)C = AC + BC$

(5) のみ証明して, 残りは演習問題 (演習問題 2.8) とする。$A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列とし, $AE = (c_{ij})$ とすると,

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\delta_{sj}$$

となっている。s が 1 から n まで変化するとき, $s = j$ 以外は $\delta_s = 0$ である。よって和の中で残るのは $s = j$ の場合のみなので

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\delta_{sj} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}$$

となるので $AE = A$ が成立する。

$B = (b_{ij})$ を (m, n) 行列とし, $EB = (d_{ij})$ とすると,

$$d_{ij} = \sum_{s=1}^{m} \delta_{is}b_{sj}$$

となっている。s が 1 から m まで変化するとき, $s = i$ 以外は $\delta_s = 0$ である。よって和の中で残るのは $s = i$ の場合のみなので

$$d_{ij} = \sum_{s=1}^{m} \delta_{is}b_{sj} = \delta_{ii}b_{ij} = b_{ij}$$

[2] n 次行列の零行列はまだ定義していない。次の定義参照。

[3] 次数が n のとき E_n とも書く。

となるので $EB = B$ が成立する。 ∎

命題 2.5 より，実数の 0 に対応するのが零行列 O であり，実数の 1 に対応するのが単位行列 E であることが分る。

演習問題 2.8 命題 2.5 を示せ

定義 2.6 n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対し n 次行列 X が存在して

$$AX = E \qquad XA = E$$

となるとき X を A の**逆行列** (*inverse matrix*) という。A の逆行列は存在すれば唯 1 つであることが分かるので (命題 2.7)，これを A^{-1} と表す。またこのとき A は**可逆** (*invertible*) または**正則** (*regular*) であるという。

実際には $AX = E$ または $XA = E$ の一方の等式が成立すれば，他方の等式も成立し X が逆行列である事が分かるが，この事実は後で行列式の所で証明する。

命題 2.7 n 次行列 A に対し，n 次行列 X, Y が

$$AX = XA = E, \qquad AY = YA = E$$

をみたせば，$X = Y$ である。

証明 $X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = T$ なので OK。 ∎

命題 2.8 A,B が正則な行列のとき AB も正則で，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成立する。

証明 A, B は正則なので逆行列 A^{-1}, B^{-1} が存在する。$X = B^{-1}A^{-1}$ とおくと，$(AB)X = A(BX) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(EA^{-1}) = AA^{-1} = E$ であり，$X(AB) = (XA)B = ((B^{-1}A^{-1})A)B = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E$ なので X は AB の逆行列になる。 ∎

演習問題 2.9 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。また正則のとき逆行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

演習問題 2.10 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。また正則のとき逆行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & x & y \\ 0 & b & 1 & z \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

演習問題 2.11　2 重添字に慣れるための問題

(1) 行列 $A=(a_{ij})$ に対し $A^T=(a'_{ij})$ を $a'_{ij}=a_{ji}$ で定め，A^T を A の転置行列という。このとき $(AB)^T=B^TA^T$ を示せ。

(2) n は 2 以上の自然数とする。$A_n=(a_{ij})$ を n 次行列とする。ただし a_{ij} は $a_{i\,i+1}=1$ $(i=1,\ldots,n-1)$ を満たし，これ以外は 0 であるものとする。$n=2,3,4$ の場合 A_n がどのような行列か書き下してみよ。

(3) (2) の行列に対し A_2^2，A_3^3，A_4^4 を計算せよ。

(4) (2) の行列に対し A_n^n を計算せよ。

(5) n は 2 以上の自然数とする。$A_n=(a_{ij})$ を n 次行列とする。ただし a_{ij} は $a_{i\,i+1}=1$ $(i=1,\ldots,n-1)$, $a_{n1}=1$ を満たし，これ以外は 0 であるものとする。$n=2,3,4$ の場合 A_n がどのような行列か書き下してみよ。

(6) (5) の行列に対し A_2^2，A_3^2, A_3^3，A_4^2, A_4^2, A_4^4 を計算せよ。

(7) (5) の行列に対し A_n^n を計算せよ。

(8) $i\geqq j$ の時 $a_{ij}=0$ であるような n 次行列 $A=(a_{ij})$ に対し $A^n=O$(零行列) が成立する事を次の順にしたがって示せ。

1) $A_n^k=\left(a_{ij}^{(k)}\right)$ とおく。$k=1$ のときは $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}$ である。

2) $i+1\geqq j$ ならば $a_{ij}^{(2)}=0$ であることを示せ。

3) $i+2\geqq j$ ならば $a_{ij}^{(3)}=0$ であることを示せ。

4) 自然数 k に対し $i+k\geqq j$ ならば $a_{ij}^{(k+1)}=0$ であることを示せ。

5) $A_n^n=O$ であることを示せ。

演習問題 2.12　A が正則のとき A^T も正則であり，$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$ を示せ。

演習問題 2.13　n 次行列 A が $A^TA=E$ かつ $AA^T=E$ を満たすとき，A を**直交行列**という。次を示せ。
(1) A が直交行列のとき，A^T も直交行列である
(2) A が直交行列のとき A^{-1} も直交行列である。
(3) A と B がともに直交行列であるとき，AB も直交行列である。

(m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ を n 個の m 次元ベクトルの組で表すと便利なことがある。各 j $(j=1,\ldots,n)$ に対し $\boldsymbol{a}_j=(a_{ij})$ とおくと，$A=(\boldsymbol{a}_1\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ と表す事ができる。(n,p) 行列 $B=(b_{ij})$ に対し $\boldsymbol{b}_j=(b_{ij})$ $(j=1,\ldots,p)$ とおくとき，$B=(\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}_p)$ であるが，$AB=A(\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}_p)=(A\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ A\boldsymbol{b}_p)$ が成立する。

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。これは後で定義する**線型写像** (*linear map*) になっている，即ち T_A は次の性質を持つ：

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})$ が成立する。

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $T_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T_A(\boldsymbol{x})$ が成立する。

2 次元の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 2.9 3 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に関して次は同値である。

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $|T_A(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ が成立する。

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

(3) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}, A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3)$ とおくとき，$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ が成立する。

(4) $A^T A = E$ が成立する。

証明は 2 次元の場合と同様なので演習問題とする。

演習問題 2.14 定理 2.9 を証明せよ。