線型代数 I 要綱 #5

2006–5–26　河野

2.3　連立 1 次方程式

連立 1 次方程式を表現する形は色々ある。

$$
(E)\left\{\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.
$$

(E) が通常の連立 1 次方程式である。これを行列を用いて表現する。

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

とおくと (E) は行列を用いて

$(E_M)\quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

と表現できる。(E_M) を行列表示という。

$$
\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}
$$

とおくと

$(E_v)\quad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$

と表現できる。(E_v) をベクトル方程式表示という。この 3 つは同じ方程式を表している。

連立 1 次方程式がいつ解を持つか，解をどのように表示するかという問題が考えられるが，一般論に関しては後期に扱う。ここでは基本変形を用いた解の具体的表示を与える。

最初に簡単な例を考える。

$$
(E)\qquad \left\{\begin{array}{ccc}
x + y & = & 1 \\
x + y & = & a
\end{array}\right.
$$

この連立 1 次方程式に解が存在する場合は $1 = x + y = a$ なので，$a = 1$ が必要である。すなわち $a \neq 1$ のときは解が存在しないし，$a = 1$ のときは解が存在する。この様に連立 1 次方程式には解が存在する場合もあるし，存在しない場合もある。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

$a=1$ のとき解が存在するが，解は 1 個ではなく。たくさん存在する。その全ての解は t をパラメータとして

$$x=t, y=1-t$$

と表す事ができる。即ち任意の t に対し $x=t, y=1-t$ は連立 1 次方程式 (E) の解になっており，また連立 1 次方程式 (E) の任意の解 x, y に対しある t が存在して $x=t, y=1-t$ と書く事ができる。ベクトルの形に表示すると，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。解が存在する場合は，この様に解をパラメータ表示する事ですべての解を求める事ができる。この様なパラメータ表示を求める事が「**連立 1 次方程式を解く**」事であるといえる。

解が唯 1 つの場合もパラメータ表示の一種と考える事ができる。例えば

$$(E_1) \qquad \begin{cases} x+y &= 2 \\ x-y &= 0 \end{cases}$$

の場合解は $x=1, y=1$ となるが，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と考える事ができる。

連立 1 次方程式 (E) を解く事は難しくなかった。もうすこし難しい連立 1 次方程式を解く事を考えよう。

$$(E_2) \qquad \begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 1x+3y+2z=2 \\ 2x+5y+3z=b+3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & b+3 \end{pmatrix}$$

左が連立 1 次方程式，右がその係数を書き並べた行列 (**係数拡大行列**と呼ばれる) である。ここで b は与えられた定数とする。行列表示するために $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b+3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと (E_2) は

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

となる。このとき係数拡大行列は $\widetilde{A}=(A\ \boldsymbol{b})$ である。

この方程式が解を持つか，また持つときその解をどの様に書き表すか，という問題を考える。与えられた連立方程式では解の存在等に関して分かりにくいので加減法を用いて変形して行く。

$$\begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 1x+3y+2z=2 \\ 2x+5y+3z=b+3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & b+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 1x+3y+2z=2 \\ 1x+2y+1z=b+1 \end{cases} \quad (3\text{ 式} \to 3\text{ 式}-2\text{ 式}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & b+1 \end{pmatrix} \quad (3\text{ 行} \to 3\text{ 行}-2\text{ 行})$$

$$\begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 1x+3y+2z=2 \\ 0x+0z+0y=b \end{cases} \quad (3\text{ 式} \to 3\text{ 式}-1\text{ 式}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (3\text{ 行} \to 3\text{ 行}-1\text{ 行})$$

$$\begin{cases} 1x+2y+1z=1 \\ 0x+1y+1z=1 \\ 0x+0y+0z=b \end{cases} \quad (2\text{ 式} \to 2\text{ 式}-1\text{ 式}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (2\text{ 行} \to 2\text{ 行}-1\text{ 行})$$

$$\begin{cases} 1x+0y-1z=-1 \\ 0x+1y+1z=1 \\ 0x+0y+0z=b \end{cases} \quad (1\text{ 式} \to 1\text{ 式}-2\times 2\text{ 式}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (1\text{ 行} \to 1\text{ 行}-2\times 2\text{ 行})$$

この変形で行っているのは，式の加減 (行列では，ある行の何倍かを別の行に加える操作) である。この変形で解集合は変わらないので，与えられた連立 1 次方程式の解と最後の連立 1 次方程式の解は同じである事が分かる。すなわち $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ とおくと連立 1 次方程式 (E_2) の解集合は

$$W(A\,;\,\boldsymbol{b}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \right\}$$

であり，最後の連立 1 次方程式の解集合は

$$W(A'\,;\,\boldsymbol{b}') = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}' \right\}$$

であるが

$$W(A\,;\,\boldsymbol{b}) = W(A'\,;\,\boldsymbol{b}')$$

が成立している。この事を 2 つの連立 1 次方程式は**同値である**という。

最後の連立 1 次方程式の解について考えると，$b \neq 0$ のとき解は存在しない事が分かるので，以下 $b=0$ とする。今 z をパラメータに選び，これを自分が自由に決定できるとしよう[(1)]。このことを書き方の上でも明確にするため $t=z$ とおく[(2)]

連立 1 次方程式の解 x, y, z はパラメータ t を用いて

$$x = t-1,\ y = 1-t,\ z = t$$

[(1)] z の代わりに例えば，x を選んでもよい。
[(2)] t に置き換える必要は特にないのだが，表示を明確にするためここでは置き換えた。

と表す事ができる。ベクトルの形で表示すると

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。t を任意に与えると，x, y, z は連立 1 次方程式の解になっているし，逆に連立 1 次方程式の任意の解はある t を用いて上のように書ける。連立 1 次方程式の解がすべて求められたといえる。

演習問題 2.15　次の連立 1 次方程式が解を持つための条件を求めよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。

(1) $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+w & = & 1 \\ x+y+z+w & = & a \end{array} \right.$

(2) $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+u+v & = & 1 \\ x+2y+3z+4v & = & 0 \\ 2x+3y+4z+5v & = & a \end{array} \right.$