線型代数 I 要綱 #6

2006–5–26　河野

2.4　基本変形

この節では行列に対し「基本変形」と呼ばれる変形を考える。

(1) 行列のある行に他の行の実数倍を加える操作，(2) ある行を実数倍する操作 (ただし実数は 0 ではないとする)，(3) ある行と別の行を交換する操作，この 3 つをまとめて**行基本変形**と言う。列に対しても同じ様な変形が考えられる。(1) 行列のある列に他の列の実数倍を加える操作，(2) ある列を実数倍する操作 (ただし実数は 0 ではないとする)，(3) ある列と別の列を交換する操作，この 3 つをまとめて**列基本変形**と言う。6 つの変形を合わせて**基本変形**と呼ぶ。

基本変形の一般論は後期で扱う。ここでは連立 1 次方程式と関係ある部分について述べる。連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対し係数拡大行列 $\widetilde{A} = (A\,\boldsymbol{b})$ を対応させる。$\widetilde{A}$ の行基本変形 (1) に対応する連立 1 次方程式の変形は，1 つの方程式を，その方程式に他の方程式の何倍かを加えて得られた新しい方程式に変える変形である。行基本変形 (2) に対応する連立 1 次方程式の変形は，その方程式を実数倍して得られた方程式に変える変形である。行基本変形 (3) に対応する連立 1 次方程式の変形は，2 つの方程式の位置を入れ替える変形である。

係数拡大行列 $\widetilde{A}$ を行基本変形で $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & b'_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$ の形に変形する事を考える。この形をここでは**係数拡大行列の準標準形**(1)と呼んでおこう。係数拡大行列が準標準形である様な連立 1 次方程式に解が存在するかはすぐ分かる。解が存在するのは $b'_{k+1} = 0, \cdots, b'_m = 0$ のときである。また解が存在するとき，パラメーター表示にすることは前節で取り上げたようにすぐ分かる。

2 つの連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

の係数拡大行列を $\widetilde{A} = (A\ \boldsymbol{b})$ 及び $\widetilde{A'} = (A'\ \boldsymbol{b}')$ とする。$\widetilde{A}$ を行基本辺形した行列が $\widetilde{A'}$ であるとすると，2 つの連立 1 次方程式の解集合は等しい。即ち解集合を $W(A\,;\,\boldsymbol{b}) = \{\,\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ と表すとき

$$W(A\,;\,\boldsymbol{b}) = W(A'\,;\,\boldsymbol{b}')$$

の関係がある。以上により方程式を解くためには係数拡大行列を基本辺形で準標準形に変形できれば，方程式を解くことができる。

多くの場合行基本変形だけで準標準形にできるが，できない場合もあるので，もう 1 つ変形—列基本変形 (3)—を付け加える。ただし最後の列にだけは列基本変形を施さない事を仮定しておく。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。
(1)一般的な用語ではない。

この列基本変形 (3) に対応する連立 1 次方程式の変形は未知変数の入れ替えになっている。即ち 2 つの連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

の係数拡大行列を $\widetilde{A} = (A\ \boldsymbol{b})$ 及び $\widetilde{A}' = (A'\ \boldsymbol{b}')$ とするとき，$\widetilde{A}$ を列基本変形 (3) した行列が $\widetilde{A}'$ であるとする。例えば 1 列目と 2 列目を入れ換える変形とする。x と y を入れ換える写像を f とすると

$$f : W(A\ ;\ \boldsymbol{b}) \longrightarrow W(A'\ ;\ \boldsymbol{b}')$$

は全単射になる。実際の変形で列基本変形 (3) を使用した場合はどの変数とどの変数が入れ替わっているかを記録しておく必要があるが，列基本変形が必要な場合はあまり多くない。

基本変形について次の命題が成立する。

命題 2.10 係数拡大行列 $\widetilde{A}$ は行基本変形と列基本変形 (3) を用いて準標準形に変形できる。

証明 準標準形に変換する次の様なアルゴリズムがある。

step 1

(1.1) 1 列目に着目，この列の成分がすべて 0 の場合，列基本変形で最後から 2 列目に移動させる。よって 1 列目には 0 でない成分があると仮定してよい。その成分を行基本変形 (3) で 1 行目へ移動する。

(1.2) その成分で 1 行目を割って $(1,1)$–成分を 1 にする。

(1.3) $(i,1)$–成分 $(i>1)$ a_{i1} が 0 でなければ，1 行目の a_{i1} 倍を i 行目から引く。a_{i1} が 0 なら何もしない。

step 2

(2.1) 2 列目に着目，この列の 2 行目以降の成分がすべて 0 の場合は，列基本変形で最後から 2 列目に移動させる。よって 0 でない成分があると仮定してよい。それを 2 行目へ移動する。

(2.2) その成分で 2 行目を割って $(2,2)$–成分を 1 にする。

(2.3) $(i,2)$–成分 $(i>2)$ a_{i2} が 0 でなければ，2 行目の a_{i2} 倍を i 行目から引く。a_{i2} が 0 なら何もしない。

step $\boldsymbol{k}$

$(k.1)$ k 列目に着目，この列の k 行目以降の成分がすべて 0 の場合は，列基本変形で最後から 2 列目に移動させる。よって k 行目以降の成分には 0 成分があると仮定してよい。それを k 行目へ移動する。

$(k.2)$ その成分で k 行目を割って (k,k)–成分を 1 にする。

$(k.3)$ (i,k)–成分 $(i>k)$ a_{ik} が 0 でなければ，k 行目の a_{ik} 倍を i 行目から引く。a_{ik} が 0 なら何もしない。

この変形を各行に行うと結果として準標準形が得られる。 ∎

この変形はアルゴリズムを与えており，これに従えばどんな行列でも標準形に変形できる。しかし，この方法が一番効率がよいかという問題は別である。慣れてくれば自然と効率の悪い変形をさける様になると思われる。

演習問題 2.16 次の行列を準標準形にせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。

演習問題 2.17　次の連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

が解を持つための条件を求めよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。ただし a, b, c, p, q, r は定数とする。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ a+3 \\ b+3 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$