

3 ベクトル空間と線型写像

3.1 部分空間

例から始めよう。 $V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ とする。このとき V は命題

1.10 の 8 つの性質を満たす。この様に n 項数ベクトル空間の部分集合が命題 1.10 を満たすときがある。実は 8 つの性質をいちいち確かめなくても、次の 3 つを満たすと、命題 1.10 を満たす事が分かる (命題 3.2 参照): (1) V は空集合でない。(2) V の任意のベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} に対し $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ となる。(3) V の任意のベクトル \mathbf{x} と任意の実数 a に対し $a\mathbf{x} \in V$ となる。そこで次を定義する。

定義 3.1 n 項数ベクトル空間 \mathbb{R}^n の部分集合 V で

- (1) $V \neq \emptyset$
- (2) 任意のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ に対し $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$
- (3) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と任意のベクトル $\mathbf{v} \in V$ に対し $\alpha\mathbf{v} \in V$

の 3 つの条件を満たすものを (\mathbb{R}^n の) 部分空間 (subspace) といい、

$$V \leq \mathbb{R}^n$$

と表わす。

部分空間は含まれる \mathbb{R}^n を忘れて、それ自身を考えて、和・実数倍等の議論ができる「自律的な」空間と考えられる。そこでこの集合 V を「ベクトル空間」と呼ぶ事が許されるであろう。そこで定義 3.1 を満たす集合 V を (\mathbb{R} 上の) ベクトル空間 (vector space) または線型空間 (linear space) という。

この新しく定義したベクトル空間の間にも部分空間という概念を定義できる。 V, W をベクトル空間とする。 W が V の部分集合になっているとき、 W は V の部分空間 (subspace) といい、

$$W \leq V$$

と表わす。

V をベクトル空間とするとき、 V 自身と $\{0\}$ は V の部分空間になる。これらを (V の) 自明な部分空間 (trivial subspace) という。

演習問題 3.1 次の各 V でベクトル空間 (部分空間) になるものはどれか。証明をつけて答えよ。

$$(1) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

$$(2) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$$

$$(3) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$$

$$(4) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

$$(5) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3 x_1 \right\}$$

$$(6) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = x_2 x_3 \right\}$$

$$(7) V = \mathbb{R}^3$$

$$(8) V = \{\mathbf{0}\}$$

演習問題 3.2 次の各 V がベクトル空間になる事を示せ。

$$(1) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - w = 0 \right\}$$

$$(2) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + w = 0, x - y + z - w = 0 \right\}$$

$$(3) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid p + q + r + s + t = 0, p - q + r = 0 \right\}$$

命題 3.2 ベクトル空間 V に対して命題 1.10 の 8 つの性質が成立する。

証明 (3), (4) 以外は全体集合の \mathbb{R}^n で成立するので, その部分集合である V で成立する。

V は空集合でないので, V に属するベクトル x_0 が存在する。 $(-1)x_0$ も V に属し, $\mathbf{0} = x_0 + (-1)x_0$ も V に属する。

演習問題 1.2 と同様に \mathbb{R}^n に対しても $-x = (-1)x$ が成立する事が分かる。よって V の任意のベクトル x に対し $-x$ も V に属する。 ■

演習問題 3.3 \mathbb{R}^n の部分集合 V が (2) 任意のベクトル $v_1, v_2 \in V$ に対し $v_1 + v_2 \in V$, 及び (3) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と任意のベクトル $v \in V$ に対し $\alpha v \in V$ を満たすとする。このとき (1) $V \neq \emptyset$ という条件と (1') $0 \in V$ という条件は同値である事, すなわち (1) は (1') であるための必要十分上である事を示せ。

定義 3.3 V をベクトル空間, x_1, \dots, x_k を V のベクトルとする。

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k$$

の形のベクトルを x_1, \dots, x_k の 1 次結合 (linear combination) という。 x_1, \dots, x_k の 1 次結合全体の集合

$$W = \{ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

は部分空間になる (命題 3.4) が, これを x_1, \dots, x_k によって生成 (generate) される部分空間といひ, $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ と書く。

演習問題 3.4 ベクトル空間 V と V のベクトル x_1, \dots, x_k について $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ が V の部分空間になる事を示せ。

$\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ がどのような集合になっているか具体例を考えよう。幾何的状況も見たいので, 空間のベクトルを例にとる。

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする。 $\langle x_1 \rangle$ に属する任意のベクトル y はある実数 α を用いて $y = \alpha x_1$ と書

かれている。 y が表す点 $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}$ は原点 O と点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を結ぶ直線上にある。逆に x_1 が表す点

と原点を通る直線上にあるベクトル y を考えると y は αx_1 と書く事ができる。よってベクトルを位置ベクトルと考えると, $\langle x_1 \rangle$ は (x_1 と原点を通る) 直線を表していると考え事ができる。

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。 $\langle x_1, x_2 \rangle$ に属する任意のベクトル y はある実数 a, b を用

いて $y = ax_1 + bx_2$ と書かれている。 y が表す点 Q はベクトル x_1, x_2 が張る平面上に乗っている。逆にベクトル x_1, x_2 が張る平面上の点に (終点) 乗っているベクトル y はある実数 a, b を用いて $z = ax_1 + bx_2$ と書くことができる (演習問題 3.5)。よって $\langle x_1, x_2 \rangle$ は x_1 と x_2 が張る平面を表していると考え事ができる。

演習問題 3.5 上の x_1, x_2 に対し x_1, x_2 が張る平面上の点を表す位置ベクトル y に対しある実数 a, b が存在して $y = ax_1 + bx_2$ となることを示せ。

$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対しては $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ となる。これを示そ

う。一般に集合 A, B が等しいことを示すためには 1) $A \subseteq B$ 及び 2) $B \subseteq A$ を示せばよい。また $A \subseteq B$ を示すには A の任意の元 a が B に含まれる事を示せばよい。

$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ は明らか⁽¹⁾。 \mathbb{R}^3 から任意にベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ をとって来る。ベクトル

\mathbf{y} が $\mathbf{y} = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 + c\mathbf{x}_3$ と表されていると仮定する。このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このとき

$$\begin{aligned} x &= a + c \\ y &= 2a + b \\ z &= 3a + c \end{aligned}$$

が成立している。これを a, b, c に関する連立 1 次方程式と見て解くと $a = \frac{z-x}{2}, b = x+y-z, c = \frac{3x-z}{2}$ が得られる。

逆に $a = \frac{z-x}{2}, b = x+y-z, c = \frac{3x-z}{2}$ とおくと, $\mathbf{y} = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 + c\mathbf{x}_3 \in \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ となるので $\mathbb{R}^3 \subseteq \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ となり, 前の結果と合わせて $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ が分かる。

上の例のように多くの場合 $\langle \mathbf{x}_1 \rangle$ は直線と, $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$ は平面 $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ は \mathbb{R}^3 と一対一対応がつく。しかし「退化している」場合もある (次節の 1 次独立も参照のこと)。

例 3.4 ベクトル空間 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0 \right\}$$

とする。 V 生成するベクトルを求めて見よう。 $x + y + z + w = 0$ を連立 1 次方程式と考え, パラメータ表示を求める。 $x = -y - z - w$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z - w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾ 学生は解答において「明らか」という言葉を使用してはいけない (1 回の使用毎に 10 点減点!!)。数学では「明らか」 = 「私はその事実を簡単に証明できるが、ここでは書かない」という意味である。この他に使用してはいけない言葉として「題意より」がある。

と表される。 $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $v_1, v_2, v_3 \in V$ である。

よって $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq V$ である。

逆に任意のベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ に対し $x+y+z+w=0$ を満たしているので, 上の様に表

示できる。すなわち $v = yv_1 + zv_2 + wv_3$ となる。よって $v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ となり $V \subseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ が分かる。以上により $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ となる。

演習問題 3.6 次のベクトル空間に対し, それを生成するベクトルの組を 1 組求めよ。

$$(1) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

$$(2) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

$$(3) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - w = 0 \right\}$$

$$(4) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + w = 0, x - y + z - w = 0 \right\}$$

$$(5) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid p + q + r + s + t = 0, p - q + r = 0 \right\}$$