線型代数 I 要綱 #8

2006–6–9　河野

3.2　1 次独立と基底

この節では 1 次独立と基底について学ぶが，1 次独立を定義する前に前節で考えたベクトルの組による生成の例を見る。

例 3.5 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする。このときこれらのベクトルの組によって生成されるベクトル空間

$$W = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle$$

を考える。W は 3 個のベクトルの組から生成されているが，実は 2 個でも生成される。即ち次が成立する；

$$W = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$$

これを示すためには $W' = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$ とおくとき，$W = W'$ を示せばよい。定義から $W' \subseteq W$ が成立する。逆を示す。最初に $\boldsymbol{x}_3 = 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ が成立することを注意しておく。$\boldsymbol{x}$ を W の任意のベクトルとする。このとき実数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が存在して

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3$$

が成立している。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3 \\ &= \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3(2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_2)\boldsymbol{x}_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{x} \in W'$ が分かり，$W \subseteq W'$ の成立が示される。

次の例を考える。$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし，

$$W_1 = \langle\, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \,\rangle$$

とおく。先ほどの例と異なり $W_1' = \langle\, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \,\rangle$ とおくとき $W_1' \subsetneq W_1$ となる。このことは $\boldsymbol{y}_3 \notin W_1'$ ということから分かる (演習問題 3.7 参照)。

演習問題 3.7　例 3.5 の $\boldsymbol{y}_3, W_1'$ について $\boldsymbol{y}_3 \notin W_1'$ を示せ。

この様に生成に関してベクトルの組により性質が異なる。そこで次を定義する。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

定義 3.6 ベクトル空間 V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が次の性質をもつとき **1 次独立** (*linearly independent*) であるという：「スカラー $c_1, \ldots, c_k$ に対し

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

が成立していれば $c_1 = \cdots = c_k = 0$」

係数がすべて 0 のときはいつでも 1 次結合のベクトルが 0 になる。この定義はそれの逆が成立する場合に名前をつけたものである。

例 3.5 でいうと $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立ではないが，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。

演習問題 3.8 例 3.5 の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立ではないことを示せ。また $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立であることを示せ。

演習問題 3.9 次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ (a は定数)

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ (a は定数)

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(6) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

(7) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

演習問題 3.10 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立とする。$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$

(2) $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_1$

(3) $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3$

$k=1,2,3$ の場合 1 次独立が何を意味しているか具体的にみよう。ここでは $V=\mathbb{R}^3$ とし，幾何的イメージも考える事にする。

最初は $k=1$ の場合：$\boldsymbol{v}_1$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0}$ から $c_1=0$ が出てくるための必要十分条件は $\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{0}$ である。即ち 1 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が 1 次独立である必要十分条件は $\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{0}$ である。生成の記号を用いて書くと $\boldsymbol{v}_1$ が 1 次独立である必要十分条件は $\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle\neq\{\boldsymbol{0}\}$ である。

次に $k=2$ の場合：$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立である場合，$\boldsymbol{v}_i\neq\boldsymbol{0}$ $(i=1,2)$ はすぐに分かる。また 2 つのベクトルが平行だと $\boldsymbol{v}_1=\alpha\boldsymbol{v}_2$ と書けるので 1 次独立ではない。逆に 2 つのベクトルが平行でないとき $c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{0}$ が成立していると $c_1=c_2=0$ となるの。よって 1 次独立である必要十分条件は 2 つのベクトルが並行でない事である。

生成の記号を用いて書くと $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立である必要十分条件は $\{\boldsymbol{0}\}\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle$ が成立する事である。

$k=3$ の場合：$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立である必要十分条件は 3 つのベクトルが平行 6 面体の 3 辺になっている事である。1 次独立を否定すると，$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_3\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$ かつ $c_1\neq 0$ または $c_2\neq 0, c_3\neq 0$ が成立する。$c_3\neq 0$ とすると，$\boldsymbol{v}_3=-\dfrac{c_1}{c_3}\boldsymbol{v}_1-\dfrac{c_2}{c_3}\boldsymbol{v}_2$ と表す事ができる。このとき $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が張る平面上に存在する。$c_1\neq 0, c_2\neq 0$ の場合も同様にできる。生成の記号を用いて書くと $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立である必要十分条件は $\{\boldsymbol{0}\}\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\,\rangle$ が成立する事である。

今の議論を一般的に述べると次の命題が得られる。

命題 3.7 ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立で必要十分条件は「任意の $i=1,\ldots,n$ に対し，

$$\{\,\boldsymbol{0}\,\}\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle\subsetneq\cdots\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1}\,\rangle\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{v}_i\,\rangle\subsetneq\cdots\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\,\rangle$$

が成立することである。

どのようなベクトルの組に対しても

$$\{\,\boldsymbol{0}\,\}\subseteq\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle\subseteq\cdots\subseteq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1}\,\rangle\subseteq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{v}_i\,\rangle\subseteq\cdots\subseteq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\,\rangle$$

は成立する。命題は 1 次独立のとき等号が成立しないことを主張している。

証明 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であると仮定する。背理法で示す。ある i に関し $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1}\,\rangle=\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i\,\rangle$ が成立したと仮定する。このとき $\boldsymbol{v}_i\in\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1}\,\rangle$ が成立している。このとき実数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}$ が存在して

$$\boldsymbol{v}_i=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}$$

と書くことができる。このとき

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}+(-1)\boldsymbol{v}_i+0\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+0\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$$

が成立する。1 次独立より $-1=0$ となり矛盾。

逆に

$$\{\,\boldsymbol{0}\,\}\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle\subsetneq\cdots\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1}\,\rangle\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{v}_i\,\rangle\subsetneq\cdots\subsetneq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\,\rangle$$

が成立しているとする。１次独立の定義より

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

をみたす実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$ のみであることを示す。

今 $\alpha_n \neq 0$ を仮定すると

$$\boldsymbol{v}_n = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)\boldsymbol{v}_{n-1}$$

と書けるので $\boldsymbol{v}_n \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} \rangle$ となり $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ となり矛盾。よって $\alpha_n = 0$ が成立する。このとき

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \boldsymbol{v}_{n-1} = \boldsymbol{0}$$

が成立している。

$\alpha_{n-1} \neq 0$ を仮定すると

$$\boldsymbol{v}_{n-1} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n-1}}\right)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}}\right)\boldsymbol{v}_{n-2}$$

と書けるので $\boldsymbol{v}_{n-1} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-2} \rangle$ となり $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-2} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} \rangle$ となり矛盾。よって $\alpha_{n-1} = 0$ が成立する。このとき

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-2} \boldsymbol{v}_{n-2} = \boldsymbol{0}$$

が成立している。

以下順に議論していけばすべての i について $\alpha_i = 0$ が示される。 ∎

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を基本ベクトルとする。即ち

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。任意の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，スカラー x_1, x_2, x_3 が唯 1 組存在して $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ と表す事ができる。この様な性質を持つベクトルの組は基本ベクトルに限らない (演習問題 3.11 参照)。ここでは部分空間に関してその様なベクトルの組を考える。

定義 3.8 ベクトル空間 V に対し次の性質をもつベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在する時これをこのベクトル空間 V の**基底** (*base*) と呼ぶ。

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である。

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する。即ち $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が成立する。

演習問題 3.11 次のベクトルの組がベクトル空間 V の基底である事を示せ。

(1) $V = \mathbb{R}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $V=\mathbb{R}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}$

(3) $V=\mathbb{R}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

(4) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0\right\}$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

(5) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| x-2y+z=0\right\}$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

(6) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0\right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

(7) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \middle| x-y+z+w=0\right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

(8) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0, x-2y+z=0\right\}$ で (1 個のベクトルからなる) ベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

(9) $V=\mathbb{R}^n$ で，ベクトルの組は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$

上で考えたのは与えられたベクトルの組が基底であるかをチェックすることであった。次にベクトル空間が与えられたとき基底を見つけることを考える。例を 2 つ考える。

例 3.9 ベクトル空間 V が $V=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \middle| x_1+x_2+x_3+x_4=0, x_1+2x_2+x_3-x_4=0\right\}$ の様な形で与えられているときは，連立 1 次方程式の解をパラメータ表示することにより，基底「候補」を求めることができる。この例を考える。V の元 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ は連立 1 次方程式の解となっている。係数拡大行列は $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&2&1&-1&0\end{pmatrix}$ なので基本変形を実行して $B=$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。よってこの解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - 3x_4 \\ 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。この $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を基底候補に選ぶ。あとは実際に基底になっていることを示せばよい。

例 3.10 次にベクトル空間 V が $V = \{\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \,\}$ の様な形で与えられている場合を考える。ここで $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は V を生成しているので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立なら V の基底になる。しかし今の場合 $\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ が成立しているので，1 次独立ではない。この関係式から $\boldsymbol{v}_3 \in \langle\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \,\rangle$ が分かり，$V = \langle\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \,\rangle$ となる。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立なら V の基底になる。今 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立なので $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が基底になる。

演習問題 3.12　次の部分空間の基底を 1 組求めよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(6) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(7) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

(8) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(9) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$