

3.3 次元

3次元ベクトル空間でも扱った様に基底は一通りではない。ベクトル空間 \mathbb{R}^3 において基本ベクトルの組 e_1, e_2, e_3 は基底であるし, $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき

f_1, f_2, f_3 も基底である。

後で示すように \mathbb{R}^3 の基底は色々あるが個数はすべて3個である。そこでこの一定の数を線型空間の次元と定義したい。その前に基底の性質を明らかにするいくつかの命題を証明する。

次元を定義するためには次の定理が必要になる。

定理 3.11 $\{v_1, \dots, v_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}$ を V の2つの基底とすると $m = n$ である。

定理 3.11 を示すために次の補題を用意する。

補題 3.12 $\{v_1, \dots, v_n\}$ をベクトル空間 V の基底とする。 $f_1, \dots, f_r (r \leq n)$ が1次独立の時 v_1, \dots, v_n の番号を適当につけ変えると

$$\{f_1, \dots, f_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

は V の基底となる。

補題 3.12 の証明は難しいのでこの節の最後に述べることにする。ここでは, この補題の成立を仮定して定理 3.11 を証明する。

$n < m$ と仮定する。補題 3.12 を用いて基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を置き換えていくと $\{f_1, \dots, f_n\}$ が基底である事が分る。この時 f_{n+1} は f_1, \dots, f_n で表す事ができるので1次独立性に矛盾。よって $n \geq m$ 。 $\{v_1, \dots, v_n\}$ と $\{f_1, \dots, f_m\}$ の役割を入れ替えると同様に $n \leq m$ も示す事ができる。故に $n = m$ が得られる。 ■

定理 3.11 より次の定義が許される。

定義 3.13 ベクトル空間 V が n 個のベクトルからなる基底

$$v_1, \dots, v_n$$

を持つ時このベクトル空間 V の次元 (*dimension*) は n であるという。この次元を $\dim V$ と表す。

命題 3.14 (1) $v_1, \dots, v_n \in V$ が1次独立ならば $\dim V \geq n$ である。

(2) $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ならば $\dim V \leq n$ である。

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

証明 (1) 補題 3.12 は, 1 次独立なベクトルの組に対しベクトルを付け加えて基底にできる事も意味している。よって $\dim V \geq n$ である。

(2) $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ のとき, v_1, \dots, v_n が 1 次独立でなければあるベクトル v_k が存在して, $\langle v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = V$ となる。1 次独立でない場合はこれを繰り返す。この議論より v_1, \dots, v_n の部分集合 $v_{\alpha(1)}, \dots, v_{\alpha(s)}$ (ここで $s \leq n$) が V の基底である事が分かり, $\dim v = s \leq n$ が分かる。■

演習問題 3.13 次のベクトル空間の次元を求めよ。

(1) $V = \mathbb{R}^2$

(2) $V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y = 0, x + 3y = 0 \right\}$

(4) $V = \mathbb{R}^3$

(5) $V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \right\}$

(6) $V = \mathbb{R}^4$

(7) $V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + 4y - z + w = 0 \right\}$

(8) $V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + 4y - z + w = 0, 2x + 3y + z - 4w = 0 \right\}$

(9) $V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + 4y - z + w = 0, 2x + 3y + z - 4w = 0, 4x + 11y - z - 2w = 0 \right\}$

(10) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(11) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$(12) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(13) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(14) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(15) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

補題 3.12 の証明 : r についての帰納法で示す。

(1) $r = 1$ の時。 $\{v_1, \dots, v_n\}$ は基底なのでスカラー a_1, \dots, a_n が存在して

$$f_1 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \quad (1)$$

と書ける。すべての i について $a_i = 0$ なら $f_1 = \mathbf{o}$ で f_1 の 1 次独立性に矛盾。 $a_i \neq 0$ となる i が存在するが適当に番号を付け替えて $a_1 \neq 0$ としてよい。この時

$$v_1 = \frac{1}{a_1} f_1 + \left(-\frac{a_2}{a_1}\right) v_2 + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_1}\right) v_n$$

と書ける事に注意しておく。これを

$$v_1 = b_1 f_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$$

と書き直しておく。さて $\{f_1, v_2, \dots, v_n\}$ が基底になる事を示す。 V の任意のベクトル v に対しスカラー c_1, \dots, c_n が存在して

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

と書ける。このとき

$$\begin{aligned} v &= c_1 (b_1 f_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n) + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \\ &= c_1 b_1 f_1 + (c_1 b_2 + c_2) v_2 + \dots + (c_1 b_n + c_n) v_n \end{aligned}$$

と表す事ができる。次は 1 次独立性を示す。

$$c_1 f_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \mathbf{o} \quad (2)$$

とする。式 (2) に式 (1) を代入すると

$$c_1 (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \mathbf{o}$$

これを整理すると

$$c_1 a_1 v_1 + (c_1 a_2 + c_2) v_2 + \dots + (c_1 a_n + c_n) v_n = \mathbf{o}$$

1次独立性より $c_1 a_1 = 0$ 。 $a_1 \neq 0$ より $c_1 = 0$ が得られる。 $c_1 = 0$ のとき v_2, \dots, v_n の1次独立性より $c_2 = \dots = c_n = 0$ 。 よって1次独立も示された。

(2) $r = s$ の時成立を仮定して $s+1$ の時の成立を示す。

$$\{f_1, \dots, f_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$$

は V の基底になっているので、 f_{s+1} に対しスカラー a_1, \dots, a_n が存在して

$$f_{s+1} = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + a_{s+1} v_{s+1} + \dots + a_n v_n \quad (3)$$

と表す事ができる。 $a_{s+1} = \dots = a_n = 0$ だと f_1, \dots, f_{s+1} の1次独立性に反する。 $a_i \neq 0$ となる i ($s+1 \leq i \leq n$) が存在するが番号を適当に入れ替えて $a_{s+1} \neq 0$ としてよい。 この時

$$\begin{aligned} v_{s+1} &= \left(-\frac{a_1}{a_{s+1}}\right) f_1 + \dots + \left(-\frac{a_s}{a_{s+1}}\right) f_s + \left(\frac{1}{a_{s+1}}\right) f_{s+1} \\ &\quad + \left(-\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}}\right) v_{s+2} + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_{s+1}}\right) v_n \end{aligned}$$

と書ける事に注意しておく。これを

$$v_{s+1} = b_1 f_1 + \dots + b_{s+1} f_{s+1} + b_{s+2} v_{s+2} + \dots + b_n v_n$$

と書き直しておく。 $\{f_1, \dots, f_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ は基底なので V の任意のベクトル v に対しスカラー c_1, \dots, c_n が存在して

$$v = c_1 f_1 + \dots + c_s f_s + c_{s+1} v_{s+1} + \dots + c_n v_n$$

と書ける。このとき

$$\begin{aligned} v &= c_1 f_1 + \dots + c_s f_s + c_{s+1} (b_1 f_1 + \dots + b_{s+1} f_{s+1} + b_{s+2} v_{s+2} + \dots + b_n v_n) \\ &\quad + c_{s+2} v_{s+2} + \dots + c_n v_n \\ &= (c_1 + c_{s+1} b_1) f_1 + \dots + (c_s + c_{s+1} b_s) f_s + (c_{s+1} b_{s+1}) f_{s+1} \\ &\quad + (c_{s+2} + c_{s+1} b_{s+2}) v_{s+2} + \dots + (c_n + c_{s+1} b_n) v_n \end{aligned}$$

と表す事ができる。次は1次独立性を示す。

$$c_1 f_1 + \dots + c_{s+1} f_{s+1} + c_{s+2} v_{s+2} + \dots + c_n v_n = \mathbf{0} \quad (4)$$

とする。式(4)に式(3)を代入すると

$$\begin{aligned} c_1 f_1 + \dots + c_s f_s + c_{s+1} (a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + a_{s+1} v_{s+1} + \dots + a_n v_n) \\ + c_{s+2} v_{s+2} + \dots + c_n v_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

これを整理すると

$$\begin{aligned} (c_1 + c_{s+1} a_1) f_1 + \dots + (c_s + c_{s+1} a_s) f_s + (c_{s+1} a_{s+1}) v_{s+1} \\ + (c_{s+2} + c_{s+1} a_{s+2}) v_{s+2} + \dots + (c_n + c_{s+1} a_n) v_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

1次独立性より $c_{s+1} a_{s+1} = 0$ 。 $a_{s+1} \neq 0$ より $c_{s+1} = 0$ が得られる。 $c_{s+1} = 0$ のとき $c_1 = \dots = c_n = 0$ が得られ1次独立も示される。 ■