線型代数 I 要綱 #10

2006–7–14　　河野

3.4　線型写像

定義 3.15 U, V をベクトル空間とする。U から V への写像 T が次の 2 つの性質を満たすとき**線型写像** (*linear map*) という。

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ に対し $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$

(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in U$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $T(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v})$

例 3.16　(1) $U = V = \mathbb{R}$ とする。実数上の線型写像とは正比例の事である。T を U から V への線型写像とすると，実数 a が存在して任意の実数 x に対し $y = T(x) = ax$ が成立する。即ち実数から実数への線型写像は「正比例」である。

(2) $U = V = \mathbb{R}^2$ とし，$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする。このとき $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると，T_A は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像になる。これはベクトルを原点中心に θ 回転させる写像である。

(3) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$，$V = \mathbb{R}^2$ とする。$T : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義すると T は正射影 (projection) と呼ばれる線型写像になる。

(4) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を z 軸に関する θ 回転させたベクトルを対応させる写像とする。$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が張る平行 4 辺形の対角線で与えられるベクトルが $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ である。この平行 4 辺形を θ 回転させて得られる平行 4 辺形は $T(\boldsymbol{u})$ と $T(\boldsymbol{v})$ によって張られている。この対角線は $T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ であるが，これは $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ を θ 回転させた $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ である。よって $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ が得られる。同様に $T(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v})$ が分かる。T は線型写像である。

(5) 例の (2) は特別な形の行列であったが，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を一般の行列とする。このとき $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像は線形写像である。これがどのような線形写像であるかは A の選び方により様々である。

(6) 自然数 m, n に対し，$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ とする。(m, n) 行列 A を 1 つ固定する。この A に対し写像 $T_A : U \to V$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると，T_A は線型写像である。 この T_A を行列 A により定まる線型写像という。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

演習問題 3.14　$T : U \longrightarrow V$ を線形写像とする。このとき $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$ が成立することを示せ。

例 3.16 の (6) の逆が成立する。即ち次が成り立つ。

定理 3.17 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像 T に対し (m, n) 行列 A が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる。

証明　各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し $\boldsymbol{e}_i = (\delta_{ij})$ とおく。即ち $\boldsymbol{e}_i$ を基本ベクトルとする。$T(\boldsymbol{e}_i)$ は $\mathbb{R}^m$ のベクトルなのでこれを $T(\boldsymbol{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ と置き，更に $A = (a_{ij})$ と置く。任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と書けるので

$$
\begin{aligned}
T(\boldsymbol{x}) &= T(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\
&= x_1T(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_nT(\boldsymbol{e}_n) \\
&= x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= A\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

となり定理が成立する。 ∎

定理 3.17 の行列 A の事を線型写像 T を**表現する行列**と呼ぶ[(1)]。$\mathbb{R}^n$ 以外の場合の線型写像の表現についても後で扱う。

行列の積と写像の積 (合成関数) については次が成立する[(2)]。

定理 3.18 T を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像，S を $\mathbb{R}^p$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像とする，定理 3.17 より写像 T を表現する行列を A，写像 S を表現する行列を B とすると写像 $T \circ S$ (合成写像) を表現する行列は AB である。

演習問題 3.15　定理 3.18 を証明せよ。

演習問題 3.16　T を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像で，3 項数ベクトルに対し z 軸に関して θ 回転したベクトルを対応させる写像とする。このとき T の表現行列を求めよ。

---

(1) 行列 A と線型写像 T を同一視して，線型写像 A と言うこともある。
(2) 行列の積を定義したとき，何故このように定義するのかということは保留した。この定理が成立するように行列の積を定義したわけである。

演習問題 3.17　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とする。V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ に対し $T(\boldsymbol{x}_1), \ldots, T(\boldsymbol{x}_n)$ が 1 次独立のとき，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ も 1 次独立であることを示せ。

この逆は成り立たない。線形写像 T とベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ で $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が 1 次独立であり，$T(\boldsymbol{x}_1), \ldots, T(\boldsymbol{x}_n)$ が 1 次独立でない例をあげよ。

定義 3.19 U, V をベクトル空間とする T を U から V への線形写像とする。このとき

$$\mathrm{Im}(T) = \{\, \boldsymbol{y} \in V \mid \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in U \,\}$$

を線型写像 T の**像** (*imarge*) と呼ぶ。また

$$\ker(T) = \{\, \boldsymbol{x} \in U \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \,\}$$

を線型写像 T の**核** (*kernel*) という。$\mathrm{Im}(T) \leq V$, $\ker(T) \leq U$ が成立する (→ 演習問題 3.18)。

演習問題 3.18　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(T) \leq V$, $\mathrm{Ker}(T) \leq U$ を示せ。

例 3.20 A を (m, n) 行列とする。この時

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T_A) &= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\} \\ \mathrm{Im}(T_A) &= \{\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\} \end{aligned}$$

である。具体例を考えよう。$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする。このとき $\mathrm{Ker}(T_A)$, $\mathrm{Im}(T_A)$ を具体的に書き表してみよう。$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は 4 つの 1 次方程式

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8w &= 0 \\ 9x + 10y + 11z + 12w &= 0 \\ 13x + 14y + 15z + 16w &= 0 \end{aligned}$$

で表されるが，変形すると 2 つの方程式

$$\begin{aligned} x - z - 2w &= 0 \\ y + 2z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

と同値である事が分かる。よって x, y は z, w を用いて $x = z + 2w$, $y = -2z - 3w$ と書けるので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ に対し

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z + 2w \\ -2z - 3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w \\ -3w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - z - 2w = 0,\ y + 2z + 3w = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在することと，次の連立方程式方程式が解を持つということは同値である。

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= X \\ 5x + 6y + 7z + 8w &= Y \\ 9x + 10y + 11z + 12w &= Z \\ 13x + 14y + 15z + 16w &= W \end{aligned}$$

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 5 & 6 & 7 & 8 & Y \\ 9 & 10 & 11 & 12 & Z \\ 13 & 14 & 15 & 16 & W \end{pmatrix}$ を基本変形して $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 4 & 4 & 4 & 4 & Y - X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X - 2Y + Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2X - 3Y + W \end{pmatrix}$ とできる。よって解を持つ必要十分条件は

$$X - 2Y + Z = 0, \qquad 2X - 3Y + W = 0$$

である。$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T_A)$ のとき

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -X + 2Y \\ -2X + 3Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ -X \\ -2X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 2Y \\ 3Y \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と書けるので

$$\mathrm{Im}(I_A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; X - 2Y + Z = 0, 2X - 3Y + W = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

演習問題 3.19　次の行列 A に対し T_A の核 $\mathrm{Ker}(T_A)$ と像 $\mathrm{Im}(T_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$　　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

演習問題 *3.20　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とする。このとき

$$\dim U = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

が成立する事を示せ。**ヒント**: $\mathrm{Ker}(T)$ の基底と $\mathrm{Im}(T)$ の基底から U の基底を構成する。$\mathrm{Ker}(T)$ の基底を $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s$，$\mathrm{Im}(T)$ の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t$ とする。各 $\boldsymbol{v}_i$ に対し $T(\boldsymbol{w}_i) = \boldsymbol{v}_i$ となるベクトル $\boldsymbol{w}_i$ をとる。このとき $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_t$ が U の基底になることを示す。

定義 3.21 ベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像 T が全単射(3)である時 T を**同型写像** (*isomorphism*) という。2 つの線型空間の間に同型写像が存在する時 U と V は**同型** (*isomorphic*) であるといい，$U \cong V$ と書く。

U と V が同型のとき，$\dim U = \dim V$ 等，ベクトル空間としての性質はすべて等しい。

例 3.16 でいうと

(1) $a \neq 0$ のとき同型，そうでない時は同型でない。

(2) T_A は同型写像である。

(3) T は同型写像になる。

(4) T は同型写像である。

(5) $ad - bc \neq 0$ のとき T_A は同型写像，$ad - bc = 0$ のとき同型写像でない。

(6) $m \neq n$ のときは同型写像にならない。$m = n$ のとき，A が正則行列であれば同型写像，そうでなければ同型写像でない。ただし (5)，(6) の証明は後回しとする(4)。

演習問題 3.21　(5)，(6) を除き上で述べたことを証明せよ。
演習問題 3.22　線型写像 $T : U \to V$ が単射である必要十分条件は $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ。

---
(3)数学序論で学んだと思うが一応定義を書いておく。$f : X \longrightarrow Y$ が単射とは任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し $f(x_1) = f(x_2)$ なら $x_1 = x_2$ であり，全射とは任意の $y \in Y$ に対し $y = f(x)$ となる元 $x \in X$ が存在する事である。単射かつ全射のとき全単射という。
(4)後期に線型代数 II で取り扱う。