# 線型代数 I 問題解説 #1

河野

**演習問題 1.1**　命題 1.1 を証明せよ。

**(2)**　最初に実数に対して交換法則 $x+y=y+x$ が成立していることを確認しておく。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ y_2+x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

となり，交換法則が成立する。

**(3)**　$\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくとベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し

$$
\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+0 \\ x_2+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{x}
$$

となり，命題成立が分かる。

**(4)**　ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し $-\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$
\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1-x_1 \\ x_2-x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0}
$$

となり，命題成立。

**(5)**　ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ および実数 $\alpha$ に対し

$$
\begin{aligned}
\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)=\alpha\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_2) \\ \alpha(x_2+y_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ \alpha x_2+\alpha y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

となりベクトルに関する分配法則の成立が分かる。

**(6)** ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と実数 $\alpha$, $\beta$ に対し

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} &= (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x_1 \\ (\alpha+\beta)x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta x_1 \\ \alpha x_2+\beta x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

となり実数に関する分配法則の成立が分かる。

**(7)** ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と実数 $\alpha$, $\beta$ に対し

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\boldsymbol{x} &= (\alpha\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ (\alpha\beta)x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \alpha(\beta x_2) \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix}=\alpha\left(\beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)=\alpha(\beta\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となり実数倍に関する結合法則が成立する。

**(8)** ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し

$$1\boldsymbol{x} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot x_1 \\ 1\cdot x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{x}$$

となり命題の証明がすべて終る。

**演習問題 1.2**　次を命題 1.1 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。
(1) $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$
(2) 任意の実数 $\alpha$ に対し $\alpha\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$

**(1)** $-\boldsymbol{x}$ は命題 1.1 の (4) の性質を持っている。逆にベクトル $\boldsymbol{y}$ が (4) の性質を持っているとする ; 即ち $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ が成立しているとする。このとき

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{x} &\underset{(3)}{=} -\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=-\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\underset{(1)}{=}(-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}\underset{(2)}{=}(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{y} \\ &\underset{(4)}{=} \boldsymbol{0}+\boldsymbol{y}\underset{(2)}{=}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{0}\underset{(4)}{=}\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

となり, $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}$ が分かる。ここで**等号の下の数字は**, 命題 1.1 のこの数字の性質を用いて変形していることを表している。

よって $\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を示せば, $(-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$ であることが分かる。

$$\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x} \underset{(8)}{=} 1\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}\underset{(6)}{=}(1+(-1))\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}$$

となるので $0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を示せば，(1) が示される。そのために，(a) ベクトル $\boldsymbol{y}$ があるベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ となっているとき，$\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ であること，(b) $\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ を示す。この (a) および (b) が示されると $0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ が分かり，(1) が示される。

ベクトル $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ を満たしているとする。

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &\underset{(4)}{=} \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(-\boldsymbol{x}) \\ &\underset{(2)}{=} (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})+(-\boldsymbol{x})\underset{(1)}{=}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})) \\ &\underset{(4)}{=} \boldsymbol{y}+\mathbf{0}\underset{(3)}{=}\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

となるので (a) は成立する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x} &\underset{(8)}{=} 1\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}\underset{(6)}{=}(1+0)\boldsymbol{x} \\ &= 1\boldsymbol{x}\underset{(8)}{=}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

となり (b) も成立する。

**(2)** (1) を示すなかでベクトル $\boldsymbol{y}$ があるベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ となっているとき $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ であることを示してある。よって

$$\alpha\mathbf{0}+\alpha\mathbf{0} \underset{(5)}{=} \alpha(\mathbf{0}+\mathbf{0})\underset{(3)}{=}\alpha\mathbf{0}$$

より $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$ が分かる。

**演習問題 1.3** 命題 1.4 を証明せよ。

**(2)** 最初に実数に対して交換法則 $x+y=y+x$ が成立していることを確認しておく。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1+x_1\\y_2+x_2\\x_3+y_3\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

となり，交換法則が成立する。

**(3)** $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくとベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \\ x_3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

となり，命題成立が分かる。

**(4)** ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し $-\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \\ x_3 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となり，命題成立。

**(5)** ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ および実数 $\alpha$ に対し

$$\begin{aligned}
\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + y_2) \\ \alpha(x_2 + y_2) \\ \alpha(x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 \\ \alpha x_3 + \alpha y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \\ \alpha y_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

となりベクトルに関する分配法則の成立が分かる。

**(6)** ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と実数 $\alpha$，$\beta$ に対し

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} &= (\alpha + \beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)x_1 \\ (\alpha + \beta)x_2 \\ (\alpha + \beta)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \alpha x_2 + \beta x_2 \\ \alpha x_3 + \beta x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \\ \beta x_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

となり実数に関する分配法則の成立が分かる。

**(7)** ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と実数 $\alpha$, $\beta$ に対し

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\boldsymbol{x} &= (\alpha\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ (\alpha\beta)x_2 \\ (\alpha\beta)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \alpha(\beta x_2) \\ \alpha(\beta x_3) \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \\ \beta x_3 \end{pmatrix} = \alpha\left(\beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \alpha(\beta\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となり実数倍に関する結合法則が成立する。

**(8)** ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$1\boldsymbol{x} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot x_1 \\ 1\cdot x_2 \\ 1\cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

となり命題の証明がすべて終る。

**演習問題 1.4** 次を命題 1.4 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。
(1) $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$
(2) 任意の実数 $\alpha$ に対し $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

**(1)** $-\boldsymbol{x}$ は命題 1.4 の (4) の性質を持っている。逆にベクトル $\boldsymbol{y}$ が (4) の性質を持っているとする ; 即ち $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。このとき

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{x} &\underset{(3)}{=} -\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = -\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \underset{(1)}{=} (-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y} \underset{(2)}{=} (\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{y} \\ &\underset{(4)}{=} \boldsymbol{0} + \boldsymbol{y} \underset{(2)}{=} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{0} \underset{(4)}{=} \boldsymbol{y}\end{aligned}$$

となり, $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$ が分かる。ここで**等号の下の数字は**, 命題 1.4 のこの数字の性質を用いて変形していることを表している。

よって $\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を示せば, $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ であることが分かる。

$$\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} \underset{(8)}{=} 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} \underset{(6)}{=} (1 + (-1))\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}$$

となるので $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を示せば, (1) が示される。そのために, (a) ベクトル $\boldsymbol{y}$ があるベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ となっているとき, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ であること, (b) $\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を示す。この (a) および (b) が示されると $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が分かり, (1) が示される。

ベクトル $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ を満たしているとする。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} &\underset{(4)}{=} \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(-\boldsymbol{x}) \\
&\underset{(2)}{=} (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})+(-\boldsymbol{x}) \underset{(1)}{=} \boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})) \\
&\underset{(4)}{=} \boldsymbol{y}+\boldsymbol{0} \underset{(3)}{=} \boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

となるので (a) は成立する。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x} &\underset{(8)}{=} 1\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x} \underset{(6)}{=} (1+0)\boldsymbol{x} \\
&= 1\boldsymbol{x} \underset{(8)}{=} \boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

となり (b) も成立する。

**(2)** (1) を示すなかでベクトル $\boldsymbol{y}$ があるベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ となっているとき $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ であることを示してある。よって

$$\alpha\boldsymbol{0}+\alpha\boldsymbol{0} \underset{(5)}{=} \alpha(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) \underset{(3)}{=} \alpha\boldsymbol{0}$$

より $\alpha\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ が分かる。

この解説が演習問題 1.2 の解説とほとんど同じことに気がついたかもしれない。copy & paste をして，命題 1.1 を命題 1.4 に変えただけである。この様に成分に依存しない形にしておくと適用範囲が広くなる。

**演習問題 1.5**　命題 1.6 を証明せよ。

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}'=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$$ とする。

**(1)**

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) &= \left(\begin{pmatrix} x_1+x_1' \\ x_2+x_2' \\ x_3+x_3' \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= (x_1+x_1')y_1+(x_2+x_2')y_2+(x_3+x_3')y_3 \\
&= x_1y_1+x_1'y_1+x_2y_2+x_2'y_2+x_3y_3+x_3'y_3 \\
&= (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+(x_1'y_1+x_2'y_2+x_3'y_3) \\
&= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

**(2)**

$$\begin{aligned}
(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \alpha x_1y_1+\alpha x_2y_2+\alpha x_3y_3 \\
&= \alpha(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3) \\
&= \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

**(3)**

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1+y_1' \\ y_2+y_2' \\ y_3+y_3' \end{pmatrix}\right) \\ &= x_1(y_1+y_1') + x_2(y_2+y_2') + x_3(y_3+y_3') \\ &= x_1y_1 + x_1y_1' + x_2y_2 + x_2y_2' + x_3y_3 + x_3y_3' \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_1y_1' + x_2y_2' + x_3y_3') \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')\end{aligned}$$

**(4)**

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \\ \alpha y_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= x_1\alpha y_1 + x_2\alpha y_2 + x_3\alpha y_3 \\ &= \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ &= \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

**(5)**

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 \\ &= (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\end{aligned}$$

**(6)**

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^2 \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2\end{aligned}$$