線型代数 I 問題解説 #2

河野

演習問題 1.6　命題 1.10 を証明せよ。

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ とする。最後のほうは慣れてきたと仮定して，$\boldsymbol{u} = (u_i)$, $\boldsymbol{v} = (v_i)$, $\boldsymbol{w} = (w_i)$ という記法を用いる。

(2)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_1+u_1 \\ \vdots \\ v_n+u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

(4)　$\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$ とおくと，

$$
\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1-v_1 \\ \vdots \\ v_n-v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= \alpha\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(u_1+v_1) \\ \vdots \\ \alpha(u_n+v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1+\alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n+\alpha v_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

(6)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} &= (\alpha+\beta)\bigl(v_i\bigr) = \bigl((\alpha+\beta)v_i\bigr) \\ &= \bigl(\alpha v_i + \beta v_i\bigr) = \bigl(\alpha v_i\bigr) + \bigl(\beta v_i\bigr) \\ &= \alpha\bigl(v_i\bigr) + \beta\bigl(v_i\bigr) = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

掛け算のための括弧とベクトルの記号の括弧の区別がつくだろうか。慣れていない人は前の書き方で考えればよい。

(7)

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\boldsymbol{v} &= (\alpha\beta)\bigl(v_i\bigr) = \bigl((\alpha\beta)v_i\bigr) = \bigl(\alpha(\beta v_i)\bigr) \\ &= \alpha\bigl(\beta v_i\bigr) = \alpha(\beta\bigl(v_i\bigr)) = \alpha(\beta\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

(8)

$$1\boldsymbol{v} = 1(v_i) = (1 \cdot v_i) = (v_i) = \boldsymbol{v}$$

演習問題 1.7　命題 1.11 の内積の性質 (2)，(3) から 2 番目の成分に関する線型性，すなわち
(5)　任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ ，および
(6)　任意の実数 α と任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
が成立することを示せ。

ただし，等号の下の数字は命題 1.11 の数字。

(5)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) &\underset{(2)}{=} (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) \underset{(3)-(1)}{=} (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) \\ &\underset{(2)}{=} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}) &\underset{(2)}{=} (\alpha\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \underset{(3)-(2)}{=} \alpha(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \\ &\underset{(2)}{=} \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

演習問題 1.8　命題 1.13 を示せ。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$ とおく。

(1)　実数 x に対して $x^2 \geqq 0$ であることに注意する。

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqq 0$$

が成立する。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のとき

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0^2 + \cdots + 0^2 = 0$$

となっている。逆に $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ とすると，

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=0$$

が成立している。$x_1\neq 0$ とすると $x_1^2>0$ となるが，$x_i^2\geqq 0$ $(i=2,\ldots,n)$ なので

$$0=x_1^2+\cdot+x_n^2>0$$

となり矛盾。よって $x_1=0$ である。以下同様に $x_2=\cdots=x_n=0$ が成立する。よって

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

となっている。

(2)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= x_1y_1+\cdots+x_ny_n \\ &= y_1x_1+\cdots+y_nx_n \\ &= (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= \left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) \\ &= (x_1+y_1)z_1+\cdots+(x_n+y_n)z_n \\ &= x_1z_1+y_1z_1+\cdots+x_nz_n+y_nz_n \\ &= (x_1z_1+\cdots+x_nz_n)+(y_1z_1+\cdots+y_nz_n) \\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \\ &= \alpha x_1y_1+\cdots+\alpha x_ny_n \\ &= \alpha(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \\ &= \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

演習問題 1.9　演習問題 1.7 と同様に $\mathbb{R}^n$ の場合も 2 番目の成分に関して線型性をもつ。すなわち次が成立する。この事を証明せよ。

(1)　任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ が成立する。

(2)　任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ と任意の実数 $a\in\mathbb{R}$ に対し $(\boldsymbol{x},a\boldsymbol{y})=a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成立する。

ただし，等号の下の数字は命題 1.13 の数字。

(1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) &\underset{(2)}{=} (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) \underset{(3)-(1)}{=} (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \\ &\underset{(2)}{=} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) &\underset{(2)}{=} (\alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \underset{(3)-(2)}{=} \alpha(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\ &\underset{(2)}{=} \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

この解説が演習問題 1.7 の解説と命題 1.11 と 1.13 の違いを除いて同じであることに注意せよ。

演習問題 1.10　Schwarz の不等式から次の 3 角不等式を導け; 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

が成立する。

左辺が負でないので

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \leqq (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$$

を示せばよい。この式の右辺から左辺を引き，これを A とすると

$$A = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 - \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$$

となるが，$\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ なので

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

となる。これを A に代入すると

$$\begin{aligned}A &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &= 2\,(\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\end{aligned}$$

となる。シュワルツの不等式より $\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| \geqq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となるので，$A \geqq 0$ となり 3 角不等式が証明される。

演習問題 1.11

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 4 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 5 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおく。ベクトル $\boldsymbol{x}$ は与えられた 3 つのベクトルそれぞれと直交しているので，それぞれのベクトルとの内積は 0 である。それを書き下すと

$$\begin{aligned} x + y &= 0 && (1) \\ x + y + z + w &= 0 && (2) \\ x + 2y + 3z + 4w &= 0 && (3) \end{aligned}$$

となる。長さが 1 という条件をまだ使っていないので解は決まらないが 1 つの文字を用いて他の文字を書き表してみよう。(連立 1 次方程式の一般論は次の章で扱う。) (1) と (2) から $z+w = 0 \cdots (4)$ が従う。(3) から (1) と (4) の 3 倍を引くと $y+w = 0$ が得られる。よって x を用いて他の文字を表すと

$$y = -x, \quad z = -x, \quad w = x$$

となる。よってベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \\ x \end{pmatrix}$$

となっている。ここで長さ 1 の条件を使うと

$$1 = \|\boldsymbol{x}\|^2 = x^2 + (-x)^2 + (-x)^2 + x^2 = 4x^2$$

となり，$x = \pm\dfrac{1}{2}$ となる。よって求めるベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ とおく。ベクトル $\boldsymbol{x}$ は与えられた 4 つのベクトルそれぞれと直交しているの

で，それぞれのベクトルとの内積は 0 である。それを書き下すと

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 0 & (1)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 & (2)\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 & (3)\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 & (4)
\end{aligned}
$$

1 つの文字を用いて他の文字を書き表す。(1) と (2) から $x_4 + x_5 = 0 \cdots (5)$ が従う。(4) から (2) を引くと $x_2 + x_4 = 0 \cdots (6)$ が従う。(3) から (1) と (5) の 4 倍を引くと $x_2 + 2x_3 + x_5 = 0$ が得られ，(5)，(6) を用いると $x_3 + x_5 = 0$ となる。よって x_5 を用いて他の文字を表すと

$$x_1 = 0, \quad x_2 = x_5, \quad x_3 = -x_5, \quad x_4 = -x_5$$

となる。よってベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_5 \\ -x_5 \\ -x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

となっている。ここで長さ 1 の条件を使うと

$$1 = \|\boldsymbol{x}\|^2 = 0^2 + x_5^2 + (-x_5)^2 + (-x_5)^2 + x_5^2 = 4x_5^2$$

となり，$x_5 = \pm\dfrac{1}{2}$ となる。よって求めるベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。