線型代数 I 問題解説 #3

河野

演習問題 2.1　任意の 2 次行列 A と単位行列 E に対し $AE = EA = A$ が成立する事を示せ。

行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。単位行列 E は $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{aligned}
AE &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot 1 + b\cdot 0 & a\cdot 0 + b\cdot 1 \\ c\cdot 1 + d\cdot 0 & c\cdot 0 + d\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \\
EA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a + 0\cdot c & 1\cdot b + 0\cdot d \\ 0\cdot a + 1\cdot c & 0\cdot b + 1\cdot d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A
\end{aligned}$$

よって成立する。

演習問題 2.2　任意の行列 A, B, C に対し $A(B+C) = AB + AC$ 及び $(A+B)C = AC + BC$(分配法則) が成立する事を示せ。

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とおく。

$$\begin{aligned}
A(B+C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}+c_{11}) + a_{12}(b_{21}+c_{21}) & a_{11}(b_{12}+c_{12}) + a_{12}(b_{22}+c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}+c_{11}) + a_{22}(b_{21}+c_{21}) & a_{21}(b_{12}+c_{12}) + a_{22}(b_{22}+c_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
&= AB + AC \\
(A+B)C &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})c_{11}+(a_{12}+b_{12})c_{21} & (a_{11}+b_{11})c_{12}+(a_{12}+b_{12})c_{22} \\ (a_{21}+b_{21})c_{11}+(a_{22}+b_{22})c_{21} & (a_{21}+b_{21})c_{12}+(a_{22}+b_{22})c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
&= AC+BC
\end{aligned}
$$

以上により成立する。

演習問題 2.3　2 次行列 A, B で $AB \neq BA$ となる例を 1 つあげよ。3 次行列 A, B で $AB \neq BA$ となる例を 1 つあげよ。

講義中に述べたように適当に行列 A, B を選んでもほとんどの場合 $AB \neq BA$ となる。
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので $AB \neq BA$ である。$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

この例を見ると任意の n 次行列に対し $AB \neq BA$ となる例を簡単に構成できる。即ち A, B が k 次行列で $AB \neq BA$ となる行列とすると，$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$
\widetilde{A}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

となる。2 次行列からこの方法で順番に構成していくことができる。

演習問題 2.4 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ が逆行列を持たないことを示せ。

A が逆行列 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ を持つとして矛盾を導く (背理法)。B は A の逆行列なので $AB=E$ が成立している。即ち

$$AB = \begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\2a+4c&2b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

より

$$0=2a+4c=2(a+2c)=2\cdot 1=2$$

が成立するがこれは矛盾。よって A は逆行列を持たない。

演習問題 2.5 次の行列が逆行列をもつ必要十分条件を求めよ。また逆行列をもつとき，その逆行列を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix}1&b\\a&1\end{pmatrix}$ (3) $A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ (4) $A=\begin{pmatrix}1&a\\0&0\end{pmatrix}$

前問のようにやってもよいが，ここでは行列式を用いた方法で考える。即ち $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ は $\det(A)=ad-bd\neq 0$ のとき逆行列を持ち，その逆行列は $\dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ となることを用いる。

(1) $\det(A)=1\cdot a-2\cdot 3=a-6$ なので $a\neq 6$ のとき A は逆行列を持ち，その逆行列は $\dfrac{1}{a-6}\begin{pmatrix}a&-2\\-3&1\end{pmatrix}$ である。

(2) $\det(A)=1-ab$ なので $ab\neq 1$ のとき逆行列を持ち，その逆行列は $\dfrac{1}{1-ab}\begin{pmatrix}1&-b\\-a&1\end{pmatrix}$ である。

(3) A は常に逆行列を持ち逆行列は $\begin{pmatrix}1&-a\\0&1\end{pmatrix}$ である。

(4) a がどのような値でも A は逆行列を持たない。

演習問題 2.6 $A=B(\theta)$ のとき $A^TA=E$ を示せ。

$A=B(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$ なので $A^T=A$ となる。

$$\begin{aligned}A^TA &= AA=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta+\sin\theta\sin\theta&\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta&\cos\theta\cos\theta+\sin\theta\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E\end{aligned}$$

となり成立している。

演習問題 2.7 　次の行列 A, B に対し AB を計算せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 　(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$$

(2)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

(3)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 36 & 20 \end{pmatrix}$$

(4)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 26 \end{pmatrix}$$