線型代数 I 問題解説 #4

河野

演習問題 2.8　命題 2.5 を示せ

$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$ とする。

(1) 和のための括弧と行列を表す括弧を区別すること。

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= \Big((a_{ij})+(b_{ij})\Big)+(c_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij}) \\ &= \Big((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\Big) = \Big(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\Big) \\ &= (a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij}) = (a_{ij})+\Big((b_{ij})+(c_{ij})\Big) \\ &= A+(B+C)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}A+B &= (a_{ij})+(b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij}) \\ &= (b_{ij}+a_{ij}) = (b_{ij})+(a_{ij}) = B+A\end{aligned}$$

(3) $O = (z_{ij})$ を零行列とする。即ち任意の i, j に対し $z_{ij} = 0$ となるものとする。

$$\begin{aligned}A+O &= (a_{ij})+(z_{ij}) = (a_{ij}+z_{ij}) \\ &= (a_{ij}+0) = (a_{ij}) = A\end{aligned}$$

(4) ここで A は (m,n) 行列，B は (n,p) 行列，C は (p,q) 行列とする。

$$\begin{aligned}(AB)C &= \Big((a_{ij})(b_{ij})\Big)(c_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\right)(c_{ij}) \\ &= \left(\sum_{t=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{st}\right)c_{tj}\right) \\ &= \left(\sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{st}c_{tj}\right)\end{aligned}$$

和に t を用いたのはすでに s が用いられているから

でありまた

$$\begin{aligned}A(BC) &= (a_{ij})\Big((b_{ij})(c_{ij})\Big) \\ &= (a_{ij})\left(\sum_{t=1}^{p} b_{it}c_{tj}\right) \\ &= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}\left(\sum_{t=1}^{p} b_{st}c_{tj}\right)\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}\sum_{t=1}^{p} b_{st}c_{tj}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} a_{is}b_{st}c_{tj}\right)\end{aligned}$$

和に t を用いたのは上とあわせるため。$\sum$ に用いる文字は他と衝突がなければ何を用いても意味する所は同じである

が成立する。ここで $\displaystyle\sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{st}c_{tj} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} a_{is}b_{st}c_{tj}$ が成立する (何故か? 理由を考えよ。) ので $(AB)C = A(BC)$ が成立する。

(6)

$$
\begin{aligned}
A(B+C) &= (a_{ij})\Big((b_{ij})+(c_{ij})\Big) = (a_{ij})(b_{ij}+c_{ij}) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}(b_{sj}+c_{sj})\right) = \left(\sum_{s=1}^{n}\left(a_{is}b_{sj}+a_{is}c_{sj}\right)\right) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj}\right) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\right) + \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj}\right) = AB + AC
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
(A+B)C &= \Big((a_{ij})+(b_{ij})\Big)(c_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})(c_{ij}) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n}(a_{is}+b_{is})c_{sj}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n}(a_{is}c_{sj}+b_{is}c_{sj})\right) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj} + \sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sj}\right) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj}\right) + \left(\sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sj}\right) = AC + BC
\end{aligned}
$$

演習問題 2.9　次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。また正則のとき逆行列を求めよ。

$$
A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}
$$

A が逆行列 $X = (x_{ij})$ を持つと仮定すると

$$
\begin{aligned}
XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{11}a & x_{11}b+x_{12}d & x_{11}c+x_{12}e+x_{13}f \\ x_{21}a & x_{21}b+x_{22}d & x_{21}c+x_{22}e+x_{23}f \\ x_{31}a & x_{31}b+x_{32}d & x_{31}c+x_{32}e+x_{33}f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成立している。$x_{11}a=1$ となる x_{11} が存在するためには $a\neq 0$ が必要である。以下 $a\neq 0$ を仮定する。このとき $x_{11}=\dfrac{1}{a}$ となる。また $x_{21}a=0$，$x_{31}a=0$ から $x_{21}=0$，$x_{31}=0$ となる。

$x_{21}b+x_{22}d=1$ に $x_{21}=0$ を代入すると $x_{22}d=1$ を得る。このとき解が存在するためには $d\neq 0$ が必要である。以下 $d\neq 0$ を仮定する。このとき $x_{22}=\dfrac{1}{d}$ となる。$x_{31}b+x_{32}d=0$ に $x_{31}=0$ を代入すると $x_{32}d=0$ となる。$d\neq 0$ より $x_{32}=0$ となる。

$x_{31}c+x_{32}e+x_{33}f=1$ に $x_{31}=0$，$x_{32}=0$ を代入すると $x_{33}f=1$ を得る。このとき解が存在するためには $f\neq 0$ が必要である。以下 $f\neq 0$ を仮定する。このとき $x_{33}=\dfrac{1}{f}$ となる。

$x_{11}b+x_{12}d=0$ に $x_{11}=\dfrac{1}{a}$ を代入すると $x_{12}=-\dfrac{b}{ad}$ を得る。$x_{21}c+x_{22}e+x_{23}f=0$ に $x_{21}=0$，$x_{22}=\dfrac{1}{d}$ を代入すると $x_{23}=-\dfrac{e}{df}$ を得る。$x_{11}c+x_{12}e+x_{13}f=0$ に $x_{11}=\dfrac{1}{a}$，$x_{12}=-\dfrac{b}{ad}$ を代入すると $x_{13}=\dfrac{be-cd}{adf}$ を得る。

以上をまとめると A が逆行列をもつ必要十分条件は $a\neq$ かつ $d\neq 0$ かつ $f\neq 0$ であり，逆行列は

$$X=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{b}{ad} & \dfrac{be-cd}{adf} \\ 0 & \dfrac{1}{d} & -\dfrac{e}{df} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{f} \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 2.10　次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。また正則のとき逆行列を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & x & y \\ 0 & b & 1 & z \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

前問と同様に連立方程式を解いていけばよい。計算過程は省略する。結論は $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ かつ $c\neq 0$ かつ $d\neq 0$ のとき逆行列を持ち，逆行列は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{ab} & \dfrac{1-bx}{abc} & \dfrac{-1+cz+bx-bcy}{abcd} \\ 0 & \dfrac{1}{b} & -\dfrac{1}{bc} & \dfrac{1-cz}{bcd} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c} & -\dfrac{1}{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{d} \end{pmatrix}$$

演習問題 2.11　**2 重添字に慣れるための問題**

(1) 行列 $A=(a_{ij})$ に対し $A^T=(a'_{ij})$ を $a'_{ij}=a_{ji}$ で定め，A^T を A の転置行列という。このとき $(AB)^T=B^TA^T$ を示せ。

(2) n は 2 以上の自然数とする。$A_n = (a_{ij})$ を n 次行列とする。ただし a_{ij} は $a_{i\,i+1} = 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ を満たし，これ以外は 0 であるものとする。$n = 2, 3, 4$ の場合 A_n がどのような行列か書き下してみよ。

(3) (2) の行列に対し A_2^2，A_3^3，A_4^4 を計算せよ。

(4) (2) の行列に対し A_n^n を計算せよ。

(5) n は 2 以上の自然数とする。$A_n = (a_{ij})$ を n 次行列とする。ただし a_{ij} は $a_{i\,i+1} = 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $a_{n1} = 1$ を満たし，これ以外は 0 であるものとする。$n = 2, 3, 4$ の場合 A_n がどのような行列か書き下してみよ。

(6) (5) の行列に対し A_2^2，A_3^2, A_3^3，A_4^2, A_4^3, A_4^4 を計算せよ。

(7) (5) の行列に対し A_n^n を計算せよ。

(8) $i \geqq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対し $A^n = O$(零行列) が成立する事を次の順にしたがって示せ。

1) $A_n^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$ とおく。$k = 1$ のときは $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ である。

2) $i + 1 \geqq j$ ならば $a_{ij}^{(2)} = 0$ であることを示せ。

3) $i + 2 \geqq j$ ならば $a_{ij}^{(3)} = 0$ であることを示せ。

4) 自然数 k に対し $i + k \geqq j$ ならば $a_{ij}^{(k+1)} = 0$ であることを示せ。

5) $A_n^n = O$ であることを示せ。

(1) $B = (b_{ij})$ とする。$B^T = (b'_{ij})$ とおくと $b'_{ij} = b_{ji}$ となっている。$AB = (c_{ij})$ とおき，$(AB)^T = (c'_{ij})$ とすると $c'_{ij} = c_{ji}$ となる。$c_{ij} = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$ なので $c'_{ij} = c_{ji} = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{js} b_{si}$ となっている。

$$\begin{aligned} B^T A^T &= (b'_{ij})(a'_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} b'_{is} a'_{sj}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} b_{si} a_{js}\right) \\ &= \left(\sum_{s=1}^{n} a_{js} b_{si}\right) = (c'_{ij}) = (AB)^T \end{aligned}$$

となる。

(2) $i = 1$ のとき (1 行目に対応) $a_{12} = 1$ でありそれ以外の a_{ij} は 0 である。$i = 2$ のとき (2 行目に対応) $a_{23} = 1$ でありそれ以外は a_{ij} は 0 である。以下 i が 3 以上の場合も同様である。よって

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(3)

$$
\begin{aligned}
A_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_3^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_3^3 &= A_3^2 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_4^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_4^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_4^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

いずれの場合も零行列になる。

(4) 一般の n の場合も零行列になると予想されるが，きちんと証明するために数学的帰納法を用いる。次の命題を $P(k)$ とし，数学的帰納法で $P(k)$ を証明する。

『自然数 k に対し $A_n^k = (a(k)_{ij})$ とおくとき $a(k)_{i\,i+k} = 1$ でありそれ以外は 0 である。』

$k = 1$ のとき $a(k)_{ij} = a(1)_{ij} = a_{ij}$ なので $P(1)$ は成立する。よって $k = \ell$ のとき成立を仮定する; 即ち $A_n^\ell = (a(\ell)_{ij})$ は上の性質をみたしていると仮定する。

$$
(a(\ell+1)_{ij}) = A_n^{\ell+1} = A_n^\ell A_n = (a(\ell)_{ij})(a_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} a(\ell)_{is} a_{sj}\right)
$$

より $a(\ell+1)_{ij} = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a(\ell)_{is} a_{sj}$ が成立している。仮定より $s \neq i+\ell$ のとき $a(\ell)_{is} = 0$ なので $a(\ell+1) = a(\ell)_{i\,i+\ell} a_{i+\ell\,j}$ となる。$j \neq i+\ell+1$ のとき $a_{i+\ell\,j} = 0$ なので $a(\ell+1)_{ij}$ は $j = i+\ell+1$ のとき 1 それ以外は 0 である。よって $P(\ell+1)$ は成立する。

数学的帰納法により任意の k に対し $P(k)$ が成立することが証明された。特に $k = n$ のとき $P(n)$ が成立する。$A_n^n = (a(n)_{ij})$ は $j = n+i$ 以外は 0 であるが，$1 \leqq i, j \leqq n$ なのでこれをみたす i, j は存在しない。よって任意の i, j (ただし $1 \leqq i, j \leqq n$) に対し $a(n)_{ij} = 0$ となる。以上により A_n^n が零行列であることが示された。

(5)

$$A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{aligned}
A_2^2 &= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\
A_3^2 &= \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\
A_3^3 &= \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
A_4^2 &= \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\
A_4^3 &= \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\
A_4^4 &= \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(7) $A_n^n=E_n$ と予想される。これを証明するため数学的帰納法を用いる。記述を簡単にするため記号を 1 つ導入する。$i\oplus j$ という記号は $i+j\leqq n$ のときは $i\oplus j=i+j$，$i+j>n$ のときは $i+j$ を n で割った余りを表すものとする。この記号を用いると a_{ij} は $a_{i\,i\oplus 1}=1$，それ以外は 0 となっている。次の命題を $P(k)$ とし，数学的帰納法で $P(k)$ を証明する。

> 『自然数 k に対し $A_n^k=(a(k)_{ij})$ とおくとき $a(k)_{i\,i\oplus k}=1$ でありそれ以外は 0 である。』

$k=1$ のとき $a(k)_{ij}=a(1)_{ij}=a_{ij}$ なので $P(1)$ は成立する。よって $k=\ell$ のとき成立を仮定する; 即ち $A_n^\ell=(a(\ell)_{ij})$ は上の性質をみたしていると仮定する。

$$(a(\ell+1)_{ij})=A_n^{\ell+1}=A_n^\ell A_n=(a(\ell)_{ij})(a_{ij})=\left(\sum_{s=1}^n a(\ell)_{is}a_{sj}\right)$$

より $a(\ell+1)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a(\ell)_{is} a_{sj}$ が成立している。仮定より $s \neq i \oplus \ell$ のとき $a(\ell)_{is} = 0$ なので $a(\ell+1) = a(\ell)_{i\, i\oplus\ell} a_{i\oplus\ell\, j}$ となる。$j \neq i \oplus \ell + 1$ のとき $a_{i\oplus\ell\, j} = 0$ なので $a(\ell+1)_{ij}$ は $j = i \oplus (\ell+1)$ のとき 1 それ以外は 0 である。よって $P(\ell+1)$ は成立する。

数学的帰納法により任意の k に対し $P(k)$ が成立することが証明された。特に $k = n$ のとき $P(n)$ が成立する。$A_n^n = (a(n)_{ij})$ は $j = n \oplus i$ 以外は 0 であるが，$n \oplus i = i$ なので $i = j$ のとき $a(n)_{ij} = 1$，それ以外は 0 である。よって任意の i, j (ただし $1 \leqq i, j \leqq n$) に対し $a(n)_{ij} = \delta_{ij}$ となるので，$A_n^n = E_n$ であることが示された。

(8)

1)　この場合は示すことはほとんどない。$\left(a_{ij}^{(1)}\right) = A_n^1 = A_n = (a_{ij})$ なので $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ が成立する。

2)　$A_n^2 = (a_{ij}^{(2)})$ なので

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{sj}$$

が成立している。$i \geqq s$ のとき $a_{is} = 0$ なので和は $i < s$ となる s に関してのみとればよい。同様に $s \geqq j$ のとき $a_{sj} = 0$ なので和は $s < j$ となる s についてのみとればよい。よって和は $i < s < j$ となる s についてのみとればよい。この様な s が存在するとき $j - i \geqq 2$ が成立する。よって $i + 1 \geqq j$ のときこのような s は存在しないので和は 0 になるよって $i + 1 \geqq j$ のとき $a_{ij}^{(2)} = 0$ である。

3)　$A_n^3 = A_n^2 A_n$ なので $a_{ij}^{(3)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(2)} a_{sj}$ が成立している。$a_{is}^{(2)}$ は $i + 1 \geqq s$ のとき 0 なので和は $i + 1 < s$ となる s についてのみとればよい。$s \geqq j$ のとき $a_{sj} = 0$ なので和は $s < j$ となる s についてのみとればよい。よって和は $i + 1 < s < j$ となる s についてのみとればよい。この様な s が存在するとき $j - i \geqq 3$ が成立する。よって $i + 2 \geqq j$ のときこのような s は存在しないので和は 0 になるよって $i + 2 \geqq j$ のとき $a_{ij}^{(3)} = 0$ である。

4)　数学的帰納法で証明する。$k = 1$ については 2) で示した。$k = \ell$ のとき成立を仮定する。即ち $i + \ell \geqq j$ のとき $a_{ij}^{(\ell+1)} = 0$ が成立しているとする。$A_n^{\ell+2} = A_n^{\ell+1} A_n$ なので $a_{ij}^{(\ell+2)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(\ell+1)} a_{sj}$ が成立している。$a_{is}^{(\ell+1)}$ は $i + \ell \geqq s$ のとき 0 なので和は $i + \ell < s$ となる s についてのみとればよい。$s \geqq j$ のとき $a_{sj} = 0$ なので和は $s < j$ となる s についてのみとればよい。よって和は $i + \ell < s < j$ となる s についてのみとればよい。この様な s が存在するとき $j - i \geqq \ell + 2$ が成立する。よって $i + \ell + 1 \geqq j$ のときこのような s は存在しないので和は 0 になるよって $i + \ell + 1 \geqq j$ のとき $a_{ij}^{(\ell+2)} = 0$ である。

5)　$\ell = n$ のとき $1 \leqq i, j \leqq n$ となる任意の i, j に対し $i + n \geqq j$ が成立するので $a_{ij}^{(n)} = 0$ である。よって $A_n^n = (a_{ij}^{(n)}) = O$ が成立する。

演習問題 2.12　A が正則のとき A^T も正則であり，$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ を示せ。

A は正則であるので逆行列 X が存在する。このとき

$$AX = XA = E$$

が成立する。このとき $(AX)^T = X^T A^T$ かつ $(XA)^T = A^T X^E$ かつ $E^T = E$ が成立するので

$$X^T A^T = A^T X^T = E$$

が成立する。よって X^T は A^T の逆行列になるので A は正則である。$X = A^{-1}$ であり，$X^T = \left(A^T\right)^{-1}$ なので $\left(A^T\right)^{-1} = X^T = \left(A^{-1}\right)^T$ が成立する。

演習問題 2.13　n 次行列 A が $A^T A = E$ かつ $AA^T = E$ を満たすとき，A を**直交行列**という。次を示せ。

(1) A が直交行列のとき，A^T も直交行列である
(2) A が直交行列のとき A^{-1} も直交行列である。
(3) A と B がともに直交行列であるとき，AB も直交行列である。

(1)　$\left(A^T\right)^T = A$ なので $A^T \left(A^T\right)^T = E$ かつ $\left(A^T\right)^T A^T = E$ が成立している。よって A^T は直交行列である。
(2)　定義から $A^{-1} = A^T$ となっている。(1) より A^{-1} も直交行列である。
(3)　$(AB)^T = B^T A^T$ であることに注意する。

$$\begin{aligned}(AB)^T(AB) &= \left(B^T A^T\right)(AB) = B^T\left(A^T A\right)B = B^T EB = B^T B = E \\ (AB)(AB)^T &= (AB)\left(B^T A^T\right) = A\left(BB^T\right)A^T = AEA^T = AA^T = E\end{aligned}$$

となるので AB も直交行列である。

演習問題 2.14　定理 2.9 を証明せよ。

(1) $\Longrightarrow$ (2): (1) より任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対し

$$(T_A(\boldsymbol{z}), T_A(\boldsymbol{z})) = |T_A(\boldsymbol{z})|^2 = |\boldsymbol{z}|^2 = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$$

が成立している。$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ とすると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ (T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) &= (T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})) \\ &= (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})) + (T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})) \\ &= (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x})) + (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + (T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{x})) + (T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{y})) \\ &= (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x})) + (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + (T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{y})) \\ &= (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x})) + 2(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) + (T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{y}))\end{aligned}$$

が成立する。$(T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$，$(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$，$(T_A(\boldsymbol{y}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ に注意すると $(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が得られる。

(2) $\Longrightarrow$ (3): $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{a}_i = T_A(\boldsymbol{e}_i)$ なので

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) &= (T_A(\boldsymbol{e}_i), T_A(\boldsymbol{e}_j)) \\
&= (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

となる。
(3) $\Longrightarrow$ (4):

$$
\begin{aligned}
A^T A &= (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)^T (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3) \\
&= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = E
\end{aligned}
$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおくと $T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$ なので

$$
\begin{aligned}
(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x})) &= \big(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\big)^2 + \big(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\big)^2 + \big(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\big)^2 \\
&= (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{32}^2)x_1^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2)x_2^2 + (a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^3)x_3^2 \\
&\quad +2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32})x_1x_2 + 2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33})x_2x_3 \\
&\quad +2(a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31})x_3x_1 \\
&= 1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2 + 1 \cdot x_3^2 + 2 \cdot 0 \cdot x_1x_2 + 2 \cdot 0 \cdot x_2x_3 + 2 \cdot 0 \cdot x_3x_1 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

となり証明が終わる。