線型代数 I 問題解説 #5

河野

演習問題 2.15　次の連立 1 次方程式が解を持つための条件を求めよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。

(1) $\begin{cases} x+y+z+w &= 1 \\ x+y+z+w &= a \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y+z+u+v &= 1 \\ x+2y+3z+4v &= 0 \\ 2x+3y+4z+5v &= a \end{cases}$

(1) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の 2 行目に 1 行目の -1 倍を加えると $\widetilde{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ を得る。与えられた連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x+y+z+w &= 1 \\ 0x+0y+0z+0w &= a-1 \end{cases}$$

と同値である。この連立 1 次方程式が解を持つ必要十分条件は $a=1$ である。$a=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y-z-w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。講義では s, t などパラメータ表示する変数を置き換えたが，慣れてくれば置き換えなくともよい (パラメータ表示に用いる変数はなんでもよい)。

(2) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 5 & a \end{pmatrix}$ を基本変形していく。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 5 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) + 2 \times (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 2a \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (3\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 2a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to -1 \times (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 2a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

となるので与えられた連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x + 0y - z + 0u - 2v & = & 2a \\ 0x + y + 2z + 0u + 3v & = & -a \\ 0x + 0y + 0z + u + 0v & = & 1-a \end{cases}$$

と同値である。式は

$$x = 2a + z + 2v, \quad y = -a - 2z - 3v, \quad u = 1 - a$$

なので，任意の a に対し解を持ち，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + z + 2v \\ -a - 2z - 3v \\ z \\ 1 - a \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。