線型代数 I 問題解説 #6

河野

演習問題 2.16　次の行列を準標準形にせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$　ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - 2\times(1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (4\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行})\leftrightarrow(4\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行})\leftrightarrow(3\text{ 行})]{}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - 3 \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - 2 \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to \frac{1}{5} \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \leftrightarrow (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 学生番号により結果が異なるので解答は省略する。

演習問題 2.17 次の連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

が解を持つための条件を求めよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。ただし a, b, c, p, q, r は定数とする。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ a+3 \\ b+3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & a+3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 6 & b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & a+3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 6 & b+3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & a+2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 6 & b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5\text{ 行}) \to (5\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & a+2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & b+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & b+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5\text{ 行}) \to (5\text{ 行}) - 2 \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

となるので与えられた連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} v + 0w + 0x + 2y + 0z & = & 1 \\ 0v + w + 0x + y + 3z & = & 1 \\ 0v + 0w + x + y + z & = & 1 \\ 0v + 0w + 0x + 0y + 0z & = & a+1 \\ 0v + 0w + 0x + 0y + 0z & = & b \end{cases}$$

と同値である。方程式は $a = -1$ かつ $b = 0$ のとき解を持つ。方程式は

$$v = 1 - 2y, \quad w = 1 - y - 3z, \quad x = 1 - y - z$$

なので，解は

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2y \\ 1-y-3z \\ 1-y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ + \end{pmatrix} z \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b & r \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 & r-p \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 & r-p \end{pmatrix}$$

となるので与えられた連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} v + w + x + y + z & = & p \\ (a-1)v + 0w + 0x + 0y + 0z & = & q-p \\ 0v + 0w + 0x + 0y + (b-1)z & = & r-p \end{cases}$$

と同値である。$a=1$ のとき解を持つためには $q-p=0$ が必要である。$b=1$ のとき解を持つためには $r-p=0$ が必要である。よって 4 つの場合に分けて考える。

(a) $a=1$ かつ $b=1$ のとき解を持つためには $p=q=r$ である必要がある。このとき

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-w-x-y-z \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $a=1$ かつ $b\neq 1$ のとき解を持つためには $q-p=0$ が必要である。また $z=\dfrac{r-p}{b-1}$ なので

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-\dfrac{r-p}{b-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{r-p}{b-1} \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $a\neq 1$ かつ $b=1$ のとき解を持つためには $r-p=0$ が必要である。また $v=\dfrac{q-p}{a-1}$ なので

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q-p}{a-1} \\ p-\dfrac{q-p}{a-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) $a\neq 1$ かつ $b\neq 1$ のとき常に解は存在する。また $v=\dfrac{q-p}{a-1}$ かつ $z=\dfrac{r-p}{b-1}$ なので

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q-p}{a-1} \\ p-\dfrac{q-p}{a-1}-\dfrac{r-p}{b-1} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{r-p}{b-1} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) この問題は (2) において $b=0$ としたものなので (2) の (b)(d) が解答になっている。

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ a & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ a & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-1 \\ a & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - 2\times(1\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-1 \\ a-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので与えられた連立 1 次方程式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + (b-1)x_4 & = & 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 & = & c-1 \\ (a-2)x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

と同値である。この方程式が解を持つためには $c = 1$ が必要である。$c = 1$ のとき解をパラメータ表示するため場合分けが必要になる。

(a) $a = 2$ かつ $b = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $a = 2$ かつ $b \neq 1$ のとき $x_4 = 0$ なので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $a \neq 2$ かつ $b = 1$ のとき $x_1 = 0$ なので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) $a \neq 2$ かつ $b \neq 1$ のとき $x_1 = 0$ かつ $x_4 = 0$ なので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$