線形解析 I 問題解説 #7

河野

演習問題 3.1　次の各 V でベクトル空間 (部分空間) になるものはどれか。証明をつけて答えよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = x_3 x_1 \right\}$

(6) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 x_2 = x_2 x_3 \right\}$

(7) $V = \mathbb{R}^3$

(8) $V = \{\mathbf{0}\}$

(1)　ベクトル空間になる。そのために定義 3.1 の (1),(2),(3) が成立することを示す。

(1) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0 - 0 + 0 = 0$ となるので $\mathbf{0} \in V$ である。よって $V \neq \emptyset$

(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ および $y_1 - y_2 + y_3 = 0$ が成立している。

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

なので

$$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1-x_2+x_3)+(y_1-y_2+y_3)=0+0=0$$

となる。よって $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$ が成立する。

(3) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 対し $x_1+x_2+x_3=0$ が成立している。任意の実数 α に対し

$$\alpha\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

なので

$$\alpha x_1-\alpha x_2+\alpha x_3=\alpha(x_1-x_2+x_3)=\alpha 0=0$$

となる。よって $\alpha\boldsymbol{x}\in V$ が成立する。

(2)　以下の例のように定義 3.1 の (2) が成立しないのでベクトル空間ではない。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x}\in V$ である。しかし $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，$2-0+0\neq 1$ なので $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\notin V$ となる。

(3)　ベクトル空間になる。そのために定義 3.1 の (1),(2),(3) が成立することを示す。

(1) $\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0+0=0$ かつ $0-3\cdot 0=0$ となるので $\mathbf{0}\in V$ である。よって $V\neq\emptyset$

(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $x_1+x_2=0$，$x_2-3x_3=0$，$y_1+y_2=0$，$y_2-3y_3=0$ が成立している。

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}(x_1+y_1)+(x_2+y_2) &= (x_1+x_2)+(y_1+y_2)=0+0=0 \\ (x_2+y_2)-3(x_3+y_3) &= (x_2-3x_3)+(y_2-3y_3)=0+0=0\end{aligned}$$

となる。よって $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$ が成立する。

(3) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し $x_1+x_2=0$ および $x_2-3x_3=0$ が成立している。

任意の実数 α に対し

$$\alpha \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \alpha x_2 &= \alpha(x_1 + x_2) = \alpha 0 = 0 \\ \alpha x_2 - 3\alpha x_3 &= \alpha(x_2 - 3x_3) = \alpha 0 = 0 \end{aligned}$$

となる。よって $\alpha \boldsymbol{x} \in V$ が成立する。

(4) ベクトル空間になる。そのために定義 3.1 の (1),(2),(3) が成立することを示す。

(1) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0 + 0 = 0$ となるので $\mathbf{0} \in V$ である。よって $V \neq \emptyset$

(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $x_1 + x_2 = 0$，$y_1 + y_2 = 0$ が成立している。

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

なので

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0$$

となる。よって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ が成立する。

(3) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し $x_1 + x_2 = 0$ が成立している。任意の実数 α に対し

$$\alpha \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

なので

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha 0 = 0$$

となる。よって $\alpha \boldsymbol{x} \in V$ が成立する。

(5) 以下の例のように定義の (2) が成立しないのでベクトル空間ではない。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x} \in V$ である。しかし $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ であり，$2 + 0 \neq 2 \times 2$ なので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \notin V$ となる。

(6)　以下の例のように定義の (2) が成立しないのでベクトル空間ではない。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ である。しかし $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，$2 \times 1 \neq 1 \times 1$ なので $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \notin V$ となる。

(7)　勿論ベクトル空間になる。3 項数ベクトルの和は 3 項数ベクトルであるし，3 項数ベクトルと実数倍も 3 項数ベクトルになる。また $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ も 3 項数ベクトルである。よって定義の (1),(2),(3) が成立する。

(8)　ベクトル空間になる。そのために定義 3.1 の (1),(2),(3) が成立することを示す。

(1) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ なので $V \neq \emptyset$

(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，$\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ となっている。(V は $\mathbf{0}$ のみを元としているから)

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ が成立する。

(3) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と任意の実数 α に対し $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ なので

$$\alpha \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha 0 \\ \alpha 0 \\ \alpha 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので $\alpha \boldsymbol{x} \in V$ が成立する。

演習問題 3.2　　次の各 V がベクトル空間になる事を示せ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + z - w = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y - z + w = 0, x - y + z - w = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, p+q+r+s+t=0, p-q+r=0 \right\}$

(1)　ベクトル空間であることを示すために定義 3.1 の (1),(2),(3) が成立することを示す。

(1) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0-0+0-0=0$ となるので $\mathbf{0} \in V$ である。よって $V \neq \emptyset$

(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対し $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ および $y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0$ が成立している。

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} (x_1+y_1) - (x_2+y_2) + (x_3+y_3) - (x_4+y_4) &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

となる。よって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ が成立する。

(3) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ に対し $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ が成立している。任意の実数 α に対し

$$\alpha \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 - \alpha x_4 &= \alpha(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ &= \alpha 0 = 0 \end{aligned}$$

となる。よって $\alpha \boldsymbol{x} \in V$ が成立する。

(2)　ベクトル空間であることを示すために定義 3.1 の (1),(2),(3) が成立することを示す。

(1) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0+0-0+0=0$，$0-0+0-0=0$ となるので $\mathbf{0} \in V$ である。よって $V \neq \emptyset$

(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対し $x_1+x_2-x_3+x_4=0$，$x_1-x_2+x_3-x_4=0$，$y_1+y_2-y_3+y_4=0$，$y_1-y_2+y_3-y_4=0$ が成立している。

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}
(x_1+y_1)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3)+(x_4+y_4) &= (x_1+x_2-x_3+x_4)+(y_1+y_2-y_3+y_4) \\
&= 0+0=0 \\
(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3)-(x_4+y_4) &= (x_1-x_2+x_3-x_4)+(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&= 0+0=0
\end{aligned}$$

となる。よって $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ が成立する。

(3) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ に対し $x_1+x_2-x_3+x_4=0$，$x_1-x_2+x_3-x_4=0$ が成立している。任意の実数 α に対し

$$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}
\alpha x_1+\alpha x_2-\alpha x_3+\alpha x_4 &= \alpha(x_1+x_2-x_3+x_4) \\
&= \alpha 0 = 0 \\
\alpha x_1-\alpha x_2+\alpha x_3-\alpha x_4 &= \alpha(x_1-x_2+x_3-x_4) \\
&= \alpha 0 = 0
\end{aligned}$$

となる。よって $\alpha\boldsymbol{x} \in V$ が成立する。

(3) ベクトル空間であることを示すために定義 3.1 の (1),(2),(3) が成立することを示す。

(1) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0+0+0+0+0=0,\ 0-0+0=0$ となるので $\mathbf{0} \in V$ である。よって $V \neq \emptyset$

(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$ に対し $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$, $x_1-x_2+x_3=0,\ y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=0,\ y_1-y_2+y_3=0$ が成立している。

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \\ x_5+y_5 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4)+(x_5+y_5) &= (x_1+x_2-x_3+x_4+x_5)+(y_1+y_2-y_3+y_4+y_5) \\ &= 0+0=0 \\ (x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3) &= (x_1-x_2+x_3)+(y_1-y_2+y_3) \\ &= 0+0=0 \end{aligned}$$

となる。よって $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ が成立する。

(3) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ に対し $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\ x_1-x_2+x_3=0$ が成立している。任意の実数 α に対し

$$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \\ \alpha x_5 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}
\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 + \alpha x_4 + \alpha x_5 &= \alpha(x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5) \\
&= \alpha 0 = 0 \\
\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 &= \alpha(x_1 - x_2 + x_3) \\
&= \alpha 0 = 0
\end{aligned}$$

となる。よって $\alpha \boldsymbol{x} \in V$ が成立する。

演習問題 3.3 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 V が (2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V$, 及び (3) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\alpha \boldsymbol{v} \in V$ を満たすとする。このとき (1) $V \neq \emptyset$ という条件と (1') $\mathbf{0} \in V$ という条件は同値である事，すなわち (1) は (1') であるための必要十分上である事を示せ。

V が零ベクトル $\mathbf{0}$ を含めば空集合ではない。よって (1') $\Longrightarrow$ (1) は成立している。次に (1) $\Longrightarrow$ (1') を示す。$V \neq \emptyset$ より，あるベクトル $\boldsymbol{x}_1$ に対し $\boldsymbol{x}_1 \in V$ となる。(3) が成立しており，0 は実数なので $0\boldsymbol{x}_1 \in V$ だが，$0\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$ なので $\mathbf{0} \in V$ が成立する。ここでは (3) のみを用いた。即ち (1)+(3) $\Longrightarrow$ (1') を示した。同様に (1)+(2) $\Longrightarrow$ (1') も示すことができる。

演習問題 3.4 ベクトル空間 V と V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ について $\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ が V の部分空間になる事を示せ。

(1) $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{x}_k \in V$ なので $V \neq \emptyset$ である。
(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ に対し実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ および実数 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ が存在して

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k, \quad \boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta_k \boldsymbol{x}_k$$

と書ける。

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\alpha_1 + \beta)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta)\boldsymbol{x}_k$$

なので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ が成立する。
(3) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ が存在して $\boldsymbol{x}\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k$ となっている。

$$\alpha \boldsymbol{x} = \alpha\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha\alpha_k \boldsymbol{x}_k$$

なので $\alpha \boldsymbol{x} \in V$ となる。

演習問題 3.5 上の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対し $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が張る平面上の点を表す位置ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対しある実数 a, b が存在して $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2$ となることを示せ。

$\{ t\boldsymbol{x}_1 \mid t \in \mathbb{R} \}$ は原点を通る $\boldsymbol{x}_1$ と同じ方向の直線を表している。この直線は $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ が張る平面上にある。$\{ t\boldsymbol{x}_2 \mid t \in \mathbb{R} \}$ についても同様である。ベクトル $\boldsymbol{y}$ を位置ベクトルと考えたとき点 P を表してるとする。P を通り $\{ t\boldsymbol{x}_2 \mid t \in \mathbb{R} \}$ と平行な直線と直線 $\{ t\boldsymbol{x}_1 \mid t \in \mathbb{R} \}$ の交点を P_1 とし $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \boldsymbol{y}_1$ とする。このときある実数 a が存在して $\boldsymbol{y}_1 = a\boldsymbol{x}_1$ となっている。また P を通り

$\{\, t\boldsymbol{x}_1 \mid t \in \mathbb{R}\,\}$ と平行な直線と直線 $\{\, t\boldsymbol{x}_2 \mid t \in \mathbb{R}\,\}$ の交点を P_2 とし $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = \boldsymbol{y}_2$ とする。このときある実数 b が存在して $\boldsymbol{y}_2 = b\boldsymbol{x}_2$ となっている。また $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ が成立する。よって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \\ &= a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

が成立している。

演習問題 3.6　次のベクトル空間に対し，それを生成するベクトルの組を 1 組求めよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x - y + z - w = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y - z + w = 0, x - y + z - w = 0 \right\}$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, p + q + r + s + t = 0, p - q + r = 0 \right\}$

(1)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ とすると $x_1 + x_2 = 0$ が成立しているので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V を生成する。

(2)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ とすると $x_1 - x_2 + x_3$，$x_1 + x_2 = 0$ が成立しているので

$$x_2 = -x_1, \quad x_3 = -2x_1$$

と x_1 を用いて他を表す事ができる。よって

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる。よって $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は V を生成する。

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ とすると $x - y + z - w = 0$ が成立しているので $x = y - z + w$ なので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y - z + w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V を生成する。

(4) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ とすると $x + y - z + w = 0,\ x - y + z - w = 0$ が成立しているので

$$x = 0, \quad y = z - w$$

と $z,\ w$ を用いて他を表す事ができる。よって

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ z - w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V を生成する。

(5) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in V$ とすると $p+q+r+s+t=0$, $p-q+r=0$ が成立しているので

$$p = q - r, \quad t = -2q - s$$

と q, r, s を用いて他を表す事ができる。よって

$$\boldsymbol{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} q-r \\ q \\ r \\ s \\ -2q-s \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。よって $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は V を生成する。