線形解析 I 問題解説 #8

河野

この解説はある程度詳しく説明したため長くなりました。全部で 27 ページあります。

演習問題 3.7　例 3.5 の $\boldsymbol{y}_3, W_1'$ について $\boldsymbol{y}_3 \notin W_1'$ を示せ。

$\boldsymbol{y}_3 \in W_1'$ として矛盾を導く (背理法)。$\boldsymbol{y}_3 \in W_1'$ より実数 a, b が存在して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}_3 = a\boldsymbol{y}_1 + b\boldsymbol{y}_2 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。このとき

$$a + b = 1, \quad b = -1, \quad a = -1$$

となるので $-2 = 1$ となり矛盾。よって $\boldsymbol{y}_3 \notin W_1'$ である。

演習問題 3.8　例 3.5 の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立ではないことを示せ。また $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立であることを示せ。

$2\boldsymbol{x}_1 + (-1)\boldsymbol{x}_2 + (-1)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ となるので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立ではない。

$a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ から $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 導出されれば 1 次独立が証明される。$a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると

$$a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より連立方程式

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ -a_2 + a_3 &= 0 \\ -a_1 + a_3 &= 0 \end{cases}$$

が得られる。これを解くと $a_1 = 0, a_2 = 0.a_3 = 0$ となる。よって $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。

演習問題 3.9　次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$　　(a は定数)

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$　(a は定数)

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(6) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

(7) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

(1)　「任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0$ 」が示されれば 1 次独立であることが分かり，その反例の存在を示せば 1 次独立でないことが分かる。

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{1}$$
$$c_2 = 0 \tag{2}$$
$$c_1 + c_2 = 0 \tag{3}$$

が得られる。これを解いて $c_1 = 0$ かつ $c_2 = 0$ を得る。よってベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である。

(2)　「任意の $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 」が示されれば 1 次独立であることが分かり，その反例の存在を示せば 1 次独立でないことが分かる。

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$c_1 + c_3 = 0 \tag{1}$$
$$c_2 + c_3 = 0 \tag{2}$$
$$c_1 + ac_3 = 0 \tag{3}$$

が得られる。(3) 式 − (1) 式 を考えると

$$(a-1)c_3 = 0 \tag{4}$$

が得られる。この式からすぐ $c_3 = 0$ を結論するものがいるが，それは間違い。$a \neq 1$ のとき (4) 式から $c_3 = 0$ を得る。これを (1) 式に代入して $c_1 = 0$ を得る。また (2) 式に $c_3 = 0$ を代入して $c_2 = 0$ を得る。よって $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となり，この場合は 1 次独立である。$a = 1$ のとき (1) と (3) は同じ式なので連立方程式は (1) 式と (2) 式のみを考えればよい。このとき $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$ は連立方程式の解になっている。「任意の $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$」の否定は「ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ が存在して $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ かつ ($c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ または $c_3 \neq 0$)」である。$c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1$ は「任意の $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$」の反例になっているのでベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立ではない。

まとめるとベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は，$a \neq 1$ のときは 1 次独立であり，$a = 1$ のときは 1 次独立でない。

(3)　「 任意の $c_1 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \Longrightarrow c_1 = 0$ 」が示されれば 1 次独立であることが分かり，その反例の存在を示せば 1 次独立でないことが分かる。$c_1\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$ から連立方程式 (今の場合 1 個の方程式を**連立**させたものだが)

$$c_1 a = 0 \tag{1}$$

を得る。$a \neq 0$ のとき (1) 式から $c_1 = 0$ を得るのでこのときは 1 次独立である。$a = 0$ のとき c_1 が何であっても連立方程式は成立する。特に $c_1 = 1$ とおくと「 任意の $c_1 \in \mathbb{R}$ に対し $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \Longrightarrow c_1 = 0$」の反例になるので，このとき 1 次独立ではない。

(4)　「 任意の $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 」が示されれば 1 次独立であることが分かり，その反例の存在を示せば 1 次独立でないことが分かる。

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{1}$$
$$c_1 + c_3 = 0 \tag{2}$$
$$c_1 + c_2 = 0 \tag{3}$$

が得られる。(1) 式と (3) 式は同じ式なので連立方程式は (1) と (2) の 2 つと考えられる。$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = -1$ は「 任意の $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 」の反例になっているので，ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立ではない。

(5)　1 次独立の性質を学べば分かるが，3 項数ベクトル 4 個の組が 1 次独立になることは絶対にない。そのことを知っていれば計算しなくとも 1 次独立でないことは分かる。「 任意の $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ 」が示せれば 1 次独立であることが分かり，その反例があることが示されれば 1 次独立でないことが分かる。

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$c_1 + c_2 + c_4 = 0 \tag{4}$$
$$c_1 + 2c_4 = 0 \tag{5}$$
$$c_1 + c_2 + c_3 + 3c_4 = 0 \tag{6}$$

が得られる。この連立方程式を解けばよいのだが，前までの問題より若干複雑になっていて演習中にも混乱している学生がいた。ここでは前の章で学んだ基本変形を用いる方法で解く。勿論混乱しない人はこのような大道具を用いなくてもよい。この連立 1 次方程式の係数拡大行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

なので基本変形を行って，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行})\leftrightarrow(2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。もとの連立 1 次方程式は次の連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_4 &= 0 \\ C_2 - c_4 &= 0 \\ c_3 + 2c_4 &= 0 \end{aligned}$$

と同値である。即ち

$$c_1 = -2c_4, \quad c_2 = c_4, \quad c_3 = -2c_4$$

と c_4 を用いて他の解を表すことができるので，解は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_4 \\ c_4 \\ -2c_4 \\ c_4 \end{pmatrix} = c_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。特に $c_4 = 1$ とすると，$c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = -2, c_4 = 1$ が反例になる。よってベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立でない。

(6) この問題と次の問題は 1 次独立の概念を理解しているだけでなく，場合分けを正しく処理できる力が試される (とはちょっと大げさかな?)。

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を仮定する。これより連立 1 次方程式

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \tag{1}$$
$$2c_1 + 2c_2 + pc_3 = 0 \tag{2}$$
$$3c_1 + qc_2 + 3c_3 = 0 \tag{3}$$

が得られる。この連立 1 次方程式の係数拡大行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & p & 0 \\ 3 & q & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

なので基本変形を行って,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & p & 0 \\ 3 & q & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - 2\times(1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-2 & 0 \\ 3 & q & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - 3\times(1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-2 & 0 \\ 0 & q-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$p-2$ で割り算を実行するなどの基本変形を続けて行いたいのであるが，$p-2=0$ の場合割り算はできない。そのために場合分けが必要になる。

(a) $p \neq 2$ かつ $q \neq 3$ の場合：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-2 & 0 \\ 0 & q-3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to \frac{1}{p-2}(2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q-3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to \frac{1}{q-3}(3\text{ 行})]{}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(2\text{ 行}) \leftrightarrow (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という基本変形を行うと連立 1 次方程式は

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

となる。この場合は 1 次独立である。

(b) $p \neq 2$ かつ $q = 3$ の場合：$q-3=0$ である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to \frac{1}{p-2}(2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という基本変形を行うと連立 1 次方程式は

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

となる。ここで $c_1=1, c_2=-1, c_3=0$ とすると「任意の $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_3\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}\Longrightarrow c_1=c_2=c_3=0$」の反例になっているので，ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立ではない。**注意**:反例は「c_1,c_2,c_3 のすべての零ではない」ことを要求されているのではなく，少なくとも 1 つ $c_i\neq 0$ であればよいので，$c_3=0$ でも反例を与えている。

(c) $p=2$ かつ $q\neq 3$ の場合：$p-2=0$ である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q-3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行})\to\frac{1}{q-3}(3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行})\to(1\text{ 行})-(3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という基本変形を行うと連立 1 次方程式は

$$c_1+c_3=0, \quad c_2=0$$

となる。ここで $c_1=1, c_2=0, c_3=-1$ とすると「任意の $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_3\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}\Longrightarrow c_1=c_2=c_3=0$」の反例になっているので，ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立ではない。しつこいが**注意**: 反例は「c_1,c_2,c_3 のすべての零ではない」ことを要求されているのではなく，少なくとも 1 つ $c_i\neq 0$ であればよいので，$c_2=0$ でも反例を与えている。

(d) $p=2$ かつ $q=3$ の場合：$p-2=0$ かつ $q-3=0$ である。係数拡大行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので連立 1 次方程式は

$$c_1+c_2+c_3=0$$

である。$c_1=1, c_2=1, c_3=-2$ は反例を与える。よってこの場合も 1 次独立ではない。

1 次独立の概念に慣れ親しんでいる人用に別解を紹介しておく。$p=2$ のとき $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_3$ なので

$$\boldsymbol{v}_1+0\boldsymbol{v}_2+(-1)\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$$

が成立する。よってこの場合 1 次独立ではない。$q=3$ のとき $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$ なので

$$\boldsymbol{v}_1+(-1)\boldsymbol{v}_2+0\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$$

が成立する。よってこの場合 1 次独立でない。上記以外の場合，即ち $p\neq 2$ かつ $q\neq 3$ の場合を考える。

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\\q\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\p\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を仮定する。これより連立 1 次方程式

$$c_1+c_2+c_3=0 \qquad (1)$$
$$2c_1+2c_2+pc_3=0 \qquad (2)$$
$$3c_1+qc_2+3c_3=0 \qquad (3)$$

が得られる。(2) 式 $-2\times$(1) 式より

$$(p-2)c_3=0$$

を得るが，$p-2\neq 0$ より $c_3=0$ となる。(3) 式 $-3\times$(1) 式より

$$(q-3)c_2=0$$

を得るが，$q-3\neq 0$ より $c_2=0$ となる。これらを (1) 式に代入して $c_1=0$ を得る。$c_1=c_2=c_3=0$ なので，この場合は 1 次独立である。

(7)

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\\q\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}1\\2\\3\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を仮定する。これより連立 1 次方程式

$$c_1+c_4=0 \tag{1}$$
$$2c_1+2c_2+c_3+2c_4=0 \tag{2}$$
$$3c_1+2c_2+2c_3+3c_4=0 \tag{3}$$
$$4c_1+3c_2+qc_3+pc_4=0 \tag{4}$$

が得られる。この連立 1 次方程式の係数拡大行列は

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2&2&3&0\\4&3&q&p&0\end{pmatrix}$$

なので基本変形を行って，

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2&2&3&0\\4&3&q&p&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\text{ 行})\to(2\text{ 行})-2\times(1\text{ 行})]{}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\3&2&2&3&0\\4&3&q&p&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{ 行})\to(3\text{ 行})-3\times(1\text{ 行})]{}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&2&2&0&0\\4&3&q&p&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(4\text{ 行})\to(4\text{ 行})-4\times(1\text{ 行})]{}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&2&2&0&0\\0&3&q&p-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{ 行})\to(3\text{ 行})-2\times(2\text{ 行})]{}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&3&q&p-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(4\text{ 行})\to(4\text{ 行})-3\times(2\text{ 行})]{}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&q-3&p-4&0\end{pmatrix}$$

(a) $q\neq 3$ の場合：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&q-3&p-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(4\text{ 行})\to\frac{1}{q-3}(4\text{ 行})]{}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&\frac{p-4}{q-3}&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\text{ 行})\to(2\text{ 行})-(4\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{p-4}{q-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{p-4}{q-3} & 0 \end{pmatrix}$$

という基本変形を行うと連立 1 次方程式は

$$c_1 = -c_4, \quad c_2 = \frac{p-4}{q-3}c_4, \quad c_3 = -\frac{p-4}{q-3}c_4$$

となる。

$$c_1 = -1, \quad c_2 = \frac{p-4}{q-3}, \quad c_3 = -\frac{p-4}{q-3}, \quad c_4 = 1$$

とおくと「 任意の $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$」に対する反例を与える。この場合は 1 次独立ではない。
(b) $q = 3$ の場合：$q - 3 = 0$ である。
係数拡大行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p-4 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，連立 1 次方程式は

$$c_1 + c_4 = 0, \quad c_2 + c_3 = 0, \quad (p-4)c_4 = 0$$

となる。ここで

$$c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 0$$

とすると「 任意の $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 」の反例になっているので，ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立ではない。いずれの場合も 1 次独立でない。

1 次独立の概念に慣れ親しんでいる人用に別解を紹介しておく。$p = 4$ のとき $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_4$ なので

$$\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3(-1)\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$$

が成立する。よってこの場合 1 次独立ではない。$q = 3$ のとき $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_3$ なので

$$0\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + (-1)\boldsymbol{v}_3 + 0\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$$

が成立する。よってこの場合 1 次独立でない。上記以外の場合，即ち $p \neq 4$ かつ $q \neq 3$ の場合を考える。

$$\boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p-4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q-3 \end{pmatrix}$$

が成立している。よって

$$(q-3)(\boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_1) = (p-4)(\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_2)$$

が成立する。変形すると

$$(q-3)\boldsymbol{v}_1 - (p-4)\boldsymbol{v}_2 + (p-4)\boldsymbol{v}_3 - (q-3)\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$$

となるが，$q-3 \neq 0$ なのでこれは反例を与えている。よっていずれの場合も 1 次独立でない。

演習問題 3.10　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立とする。$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。
(1) $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$
(2) $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_1$
(3) $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3$

「$c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 = \mathbf{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$」が示されれば 1 次独立であるし，反例があれば 1 次独立でない。

(1)　$c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 = \mathbf{0}$ とする。

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 &= c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + c_3(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3)\boldsymbol{x}_1 + (c_2 + c_3)\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 \end{aligned}$$

は零ベクトルであり，ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立なので

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad c_2 + c_3 = 0, \quad c_3 = 0$$

となっている。この連立 1 次方程式を解くと

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

が得られるので，ベクトルの組 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。

(2)　$c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 = \mathbf{0}$ とする。

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 &= c_1(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + c_2(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) + c_3(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1) \\ &= (c_1 + c_3)\boldsymbol{x}_1 + (c_1 + c_2)\boldsymbol{x}_2 + (c_2 + c_3)\boldsymbol{x}_3 \end{aligned}$$

は零ベクトルであり，ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立なので

$$c_1 + c_3 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0, \quad c_2 + c_3 = 0$$

となっている。この連立 1 次方程式を解くと

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

が得られるので，ベクトルの組 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。

(3)　$c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 = \mathbf{0}$ とする。

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 + c_3\boldsymbol{y}_3 &= c_1(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) + c_2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + c_3(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3) \\ &= (c_1 - c_2 + c_3)\boldsymbol{x}_1 + (c_2 - c_1)\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 \end{aligned}$$

は零ベクトルであり，ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立なので

$$c_1 - c_2 + c_3 = 0, \quad c_2 - c_1 = 0, \quad c_3 = 0$$

となっている。(1), (2) をやってきて勢いで「この連立 1 次方程式を解くと

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

が得られるので，ベクトルの組 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。」などと書いてしまう人がいるがこれは勿論間違い。連立 1 次方程式は次の連立 1 次方程式

$$c_1 - c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

と同値であるが，この方程式は解として例えば

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 0$$

を持つ。よってベクトルの組 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立でない。

演習問題 3.11　次のベクトルの組がベクトル空間 V の基底である事を示せ。

(1) $V = \mathbb{R}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $V = \mathbb{R}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $V = \mathbb{R}^3$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(5) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y + z = 0 \right\}$ で，ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(6) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(7) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x - y + z + w = 0 \right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(8) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0, x - 2y + z = 0 \right\}$ で (1 個のベクトルからなる) ベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(9) $V=\mathbb{R}^n$ で，ベクトルの組は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$

ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ が V の基底であることを示すのは
(1) ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ が V を生成すること，即ち $V=\langle\,\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\,\rangle$ と
(2) ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ が 1 次独立であることを示せばよい。

各問を通じて与えられたベクトルを順に $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots$ とおくことにする。

(1)　最初に生成を示す。$V\subseteq\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$ および $V\supseteq\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$ を示せばよい。$V\subseteq\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$ を示すためには任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in V$ に対し実数 $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ が存在して

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3$$

となることを示せばよい。予備的考察としてこれが成立している場合係数がどうなっているかを調べる。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

となっている。これを未知数が a_1,a_2,a_3 で，x,y,z は既知数の連立一次方程式と考えて解くと，

$$a_1=x+y-z,\quad a_2=z-y,\quad a_3=z-x$$

となる。以上を予備的考察とする。これ以降が解答になる。

任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ に対し

$$a_1=x+y-z,a_2=z-y,a_3=z-x$$

とおくと

$$x=a_1+a_2,\quad y=a_1+a_3,\quad z=a_1+a_2+a_3$$

が成立するので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\a_1+a_3\\a_1+a_2+a_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_1\\a_1\\a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\0\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_3\\a_3\end{pmatrix}\\&=a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\\&=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3\end{aligned}$$

となり $V \subseteq \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle$ が成立する。予備的考察の部分は解答に書いても書かなくてもどちらでもよいが，書かない場合も計算は行う必要がある。$V = \mathbb{R}^3$ は 3 項数ベクトル全体なので $\langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle \subseteq V$ は成立している。よって $V = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle$ が示された。

次に 1 次独立を示す。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + c_3 = 0, \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

が得られる。これを解くと

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

となる。よってベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立である。

以上の 2 つの結果よりベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は V の基底である。

(2)　最初に生成を示す。$V \subseteq \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle$ および $V \supseteq \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle$ を示せばよい。$V \subseteq \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle$ を示すためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対し実数 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3$$

となることを示せばよい。予備的考察としてこれが成立している場合係数がどうなっているかを調べる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}$$

となっている。これを未知数が a_1, a_2, a_3 で，x, y, z は既知数の連立一次方程式と考えて解くと，

$$a_1 = \frac{12}{11}x - \frac{2}{11}y + \frac{1}{11}z, \quad a_2 = -\frac{16}{11}x - \frac{1}{11}y + \frac{6}{11}z, \quad a_3 = -\frac{1}{11}x + \frac{2}{11}y - \frac{1}{11}z$$

となる。以上を予備的考察とする。これ以降が解答になる。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ に対し

$$a_1 = \frac{12}{11}x - \frac{2}{11}y + \frac{1}{11}z, \quad a_2 = -\frac{16}{11}x - \frac{1}{11}y + \frac{6}{11}z, \quad a_3 = -\frac{1}{11}x + \frac{2}{11}y - \frac{1}{11}z$$

とおくと

$$x = a_1 + a_3, \quad y = 2a_1 + a_2 + 8a_3, \quad z = 3a_1 + 2a_2 + 4a_3$$

が成立するので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 + a_3 \\ 2a_1 + a_2 + 8a_3 \\ 3a_1 + 2a_2 + 4a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ 3a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ 8a_3 \\ 4a_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3\end{aligned}$$

となり $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ が成立する。予備的考察の部分は解答に書いても書かなくてもどちらでもよいが，書かない場合も計算は行う必要がある。$V = \mathbb{R}^3$ は 3 項数ベクトル全体なので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq V$ は成立している。よって $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ が示された。

次に 1 次独立を示す。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$c_1 + c_3 = 0, \quad 2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0, \quad 3c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0$$

が得られる。これを解くと

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

となる。よってベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立である。

以上の 2 つの結果よりベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は V の基底である。

(3)　最初に生成を示す。今回は予備的考察を記述するのは省略する。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し

$$a_1 = x + y - z, \quad a_2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, \quad a_3 = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z$$

とおくと

$$x = a_1 + a_2 + a_3, \quad y = a_1 + 2a_2, \quad z = a_1 + 3a_2 + a_3$$

が成立するので

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + 2a_2 \\ a_1 + 3a_2 + a_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \\ 3a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 + a_3 \boldsymbol{x}_3
\end{aligned}$$

となり $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ が成立する。$V = \mathbb{R}^3$ は 3 項数ベクトル全体なので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq V$ は成立している。よって $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ が示された。

次に 1 次独立を示す。

$$c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2 + c_3 \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad c_1 + 2c_2 = 0, \quad c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$$

が得られる。これを解くと

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

となる。よってベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立である。

以上の 2 つの結果よりベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は V の基底である。

(4) 最初に生成を示す。予備的考察として

$$\boldsymbol{x} = a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2$$

が成立している場合係数がどうなっているかを調べる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となっている。これを未知数が a_1, a_2 で，x, y, z は既知数の連立一次方程式と考えて解くと，

$$a_1 = x, \quad a_2 = y$$

となる。($\boldsymbol{x} \in V$ なので $x+y+z=0$ であり，この解 a_1, a_2 が 3 番目の方程式の解になっていることに注意。) 以上を予備的考察とする。これ以降が解答になる。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$ に対し

$$a_1 = x, \quad a_2 = y$$

とおくと $x+y+z=0$ より $z = -x-y = -a_1-a_2$ となる。

$$x = a_1, \quad y = a_2, \quad z = -a_1 - a_2$$

が成立するので

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -a_1-a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ -a_2 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2
\end{aligned}$$

となり $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が成立する。前の問題までは $V = \mathbb{R}^3$ だったので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq V$ は自動的に成立した。しかしそうでない場合は証明が必要になる。

次に $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ を示す。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ において $1+0+(-1)=0$ なので $\boldsymbol{x}_1 \in V$ である。$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ において $0+1+(-1)=0$ なので $\boldsymbol{x}_2 \in V$ である。$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の任意のベクトルとする。このとき実数 a_1, a_2 が存在して

$$\boldsymbol{x} = a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2$$

と表される。V はベクトル空間なので，その元でベクトルの実数倍も V の元になる。よって $a_1 \boldsymbol{x}_1 \in V$ かつ $a_2 \boldsymbol{x}_2 \in V$ が成立している。また V はベクトル空間なのでその元である 2 つのベクトルの和はまた V の元になる。よって $a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 \in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ が示され，前の結果と合わせて $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が示された。

次に 1 次独立を示す。

$$c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$c_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad -c_1 - c_2 = 0$$

が得られる。これを解くと

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

となる。よってベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立である。

以上の 2 つの結果よりベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は V の基底である。

(5)　最初に生成を示す。予備的考察として

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

が成立している場合係数がどうなっているかを調べる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となっている。これを未知数が a_1, a_2 で，x, y, z は既知数の連立一次方程式と考えて解くと，

$$a_1 = \frac{1}{2}x, \quad a_2 = \frac{1}{2}z$$

となる。($\boldsymbol{x} \in V$ なので $x - 2y + z = 0$ であり，この解 a_1, a_2 が 2 番目の方程式の解になっていることに注意。) 以上を予備的考察とする。これ以降が解答になる。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$ に対し

$$a_1 = \frac{1}{2}x, \quad a_2 = \frac{1}{2}z$$

とおくと $x - 2y + z = 0$ より $y = \dfrac{x+z}{2} = a_1 + a_2$ となる。

$$x = 2a_1, \quad y = a_1 + a_2, \quad z = a_2$$

が成立するので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_1 + a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

となり $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が成立する。

次に $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ を示す。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ において $2 - 2 \times 1 + 0 = 0$ なので $\boldsymbol{x}_1 \in V$ である。$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ において $0 - 2 \times 1 + 2 = 0$ なので $\boldsymbol{x}_2 \in V$ である。$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の任意のベクトルとする。このとき実数 a_1, a_2 が存在して

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

と表される。V はベクトル空間なので，その元でベクトルの実数倍も V の元になる。よって $a_1\boldsymbol{x}_1 \in V$ かつ $a_2\boldsymbol{x}_2 \in V$ が成立している。また V はベクトル空間なのでその元である 2 つのベクトルの和はまた V の元になる。よって $a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ が示され，前の結果と合わせて $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が示された。

次に 1 次独立を示す。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$2c_1 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0, \quad 2c_2 = 0$$

が得られる。これを解くと

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

となる。よってベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。

以上の 2 つの結果よりベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は V の基底である。

(6)　間違えて (4) と同じ問題を出してしまった。

(7)　最初に生成を示す。予備的考察として

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3$$

が成立している場合係数がどうなっているかを調べる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となっている。これを未知数が a_1, a_2, a_3 で，x, y, z, w は既知数の連立一次方程式と考えて解くと，

$$a_1 = \frac{z+w}{2},, \quad a_2 = x - z, \quad a_3 = \frac{z-w}{2}$$

となる。($\boldsymbol{x} \in V$ なので $x-y+z+w=0$ であり，この解 a_1, a_2, a_3 がすべての方程式をみたしていることに注意。) 以上を予備的考察とする。これ以降が解答になる。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ に対し

$$a_1 = \frac{z+w}{2}, \quad a_2 = x - z, \quad a_3 = \frac{z-w}{2}$$

とおくと $x-y+z+w=0$ より $y = x+z+w = 3a_1+a_2+a_3$ となる。

$$x = a_1+a_2+a_3, \quad y = 3a_1+a_2+a_3, \quad z = a_1+a_3, \quad w = a_1-a_3$$

が成立するので

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 \\ 3a_1+a_2+a_3 \\ a_1+a_3 \\ a_1-a_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ 3a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 \\ a_3 \\ -a_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3
\end{aligned}$$

となり $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ が成立する。

次に $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ を示す。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ において $1-3+1+1=0$ なので $\boldsymbol{x}_1 \in V$ である。$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ において $1-1+0+0=0$ なので $\boldsymbol{x}_2 \in V$ である。$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ において $1-1+1+(-1)=0$ なので $\boldsymbol{x}_3 \in V$ である。$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ の任意のベクトルとする。このとき実数 a_1, a_2, a_3 が存在して

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3$$

と表される。V はベクトル空間なので，その元でベクトルの実数倍も V の元になる。よって $a_1\boldsymbol{x}_1 \in V$ かつ $a_2\boldsymbol{x}_2 \in V$ かつ $a_3\boldsymbol{x}_3 \in V$ が成立している。また V はベクトル空間なのでその元である 2

つのベクトルの和はまた V の元になる。よって $a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2\in V$ となる。$a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3=(a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2)+a_3\boldsymbol{x}_3$ なので $a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3\in V$ となっている。よって $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle\subseteq V$ が示され，前の結果と合わせて $V=\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$ が示された。

次に 1 次独立を示す。

$$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+c_3\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$c_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より連立 1 次方程式

$$c_1+c_2+c_3=0,\quad 3c_1+c_2+c_3=0,\quad c_1+c_3=0,\quad c_1-c_3=0$$

が得られる。これを解くと

$$c_1=0,\quad c_2=0,\quad c_3=0$$

となる。よってベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立である。

以上の 2 つの結果よりベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ は V の基底である。

(8)　最初に生成を示す。

任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V$ に対し

$$x+y+z=0,\quad x-2y+z=0$$

が成立している。このとき $x+z=0$ かつ $y=0$ が成立する。$x=a_1$ とおくと $y=0$，$z=-a_1$ が成立するので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a_1\\0\\-a_1\end{pmatrix}\\&=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\\&=a_1\boldsymbol{x}_1\end{aligned}$$

となり $V\subseteq\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle$ が成立する。

次に $V=\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle$ を示す。$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ において $1+0+(-1)=0$ かつ $1-2\times0+(-1)=0$ なので $\boldsymbol{x}_1\in V$ である。$\boldsymbol{x}$ を $\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle$ の任意のベクトルとする。このとき実数 a_1 が存在して

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1$$

と表される。V はベクトル空間なので，その元でベクトルの実数倍も V の元になる。よって $a_1\boldsymbol{x}_1 \in V$ となる。よって $\langle\, \boldsymbol{x}_1 \,\rangle \subseteq V$ が示され，前の結果と合わせて $V = \langle\, \boldsymbol{x}_1 \,\rangle$ が示された。

$c_1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ とする。$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なので $c_1 = 0$ となる。よってベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である。

以上の 2 つの結果よりベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1$ は V の基底である。

(9) 最初に生成を示す。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ に対し

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n
\end{aligned}$$

となり $V \subseteq \langle\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \,\rangle$ が成立する。

次に $V = \mathbb{R}^n$ なので $\langle\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \,\rangle \subseteq V$ は成立する。よって $V = \langle\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \,\rangle$ が示された。

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

とする。$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ なので $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ となるよってベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立である。

以上の 2 つの結果よりベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は V の基底である。

演習問題 3.12　次の部分空間の基底を 1 組求めよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(6) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(7) $v = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

(8) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(9) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

前問で与えられたベクトルの組が基底になるかのチェックをしているので，この問題の解説ではそれを省略して，基底 (まだ証明されていないので「候補」と呼ぶべきかも) を選ぶ部分のみ示す。

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ とすると $x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$ をみたしている。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される。よって基底 (候補) として $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が考えられる。

基底の選び方は勿論 1 通りではない。別の基底を選ぶこともある。たとえば $x_3 = -x_1 - 5x_2$ と見ると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} =_1 \\ =_2 \\ =_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - 5x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -5x_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と表されるので，基底 (候補) として $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ を選ぶのも 1 つの正しい解答である。基底の選び方は一般に無限通りある。

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V$ とすると $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$ をみたしている。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2x_3 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&= x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と表される。よって基底 (候補) として $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が考えられる。

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ とすると $x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$ かつ $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$ をみたしている。

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - 2 \times (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to -\frac{1}{5} \times (1\text{ 行})]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - 4 \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$ と変形すると

$$x_1 = -\frac{7}{5}x_3, \quad x_2 = \frac{3}{5}x_3$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{5}x_3 \\ \frac{3}{5}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_3 \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される。よって基底 (候補) として $\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ が考えられる。成分を整数にするためすべての成分を 5 倍した $\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ でもよい。

(4) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V$ とすると $x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0$ かつ $2x_1 + 8\boldsymbol{x}_2 - 2x_3 + x_4 = 0$ をみたしている。

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & & 10 \\ 2 & 8 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - 2 \times (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) + (2\text{ 行})]{}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to -1 \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ と変形すると

$$x_1 = -4x_2 + x_3, \quad x_4 = 0$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表される。よって基底 (候補) として $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が考えられる。

(5) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ とすると $x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ かつ $2x_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + x_3 = 0$ かつ $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ をみたしている。

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - 2 \times (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to -\frac{1}{5} \times (2\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - 4 \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - \frac{1}{5} \times (3\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - \frac{1}{5} \times (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ と変形すると

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

となる。よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり $V = \{\boldsymbol{0}\}$ となっている。この場合の基底は空集合と約束してあるので空集合を選ぶことになる。

(6) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ とすると $x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ かつ $2x_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 2x_3 = 0$ かつ $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

をみたしている。

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - 2 \times (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to -\frac{1}{5} \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - 4 \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ と変形すると

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = 0$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される。よって基底 (候補) として $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が考えられる。

(7) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が V を生成しているので 1 次独立であることがわかれば V の基底になるが，一般にはそうではない。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立でない場合は 1 個除いたベクトルの組，例えば $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が 1 次独立であれば，これが基底候補になる。実は基底になる。1 次独立，生成の概念が分かっているものは少し考えればば分かるであろう。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$c_1 - c_2 + 2c_3 = 0, \quad c_2 + c_3 = 0, \quad -c_1 - 3c_3 = 0$$

を得る。これを解いて (行列の基本変形は省略する) $c_1 = -3c_3, \quad c_2 = -c_3$ を得る。$c_3 = -1$ とすると $3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ となる。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立ではない。$\boldsymbol{x}_3$ を除いた $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が 1 次独立かどうか調べる。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より $c_1-c_2=0, c_2=0, -c_1=0$ を得るので $c_1=c_2=0$ である。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。$V=\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が示されれば基底であることが分かる。$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle = V$ は成立しているので逆向きの包含関係を示す。$\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとすると，実数 a_1, a_2, a_3 が存在して

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3$$

が成立している。ここで $\boldsymbol{x}_3=3\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ が成立しているので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+a_3(3\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\\&=(a_1+3a_3)\boldsymbol{x}_1+(a_2+a_3)\boldsymbol{x}_2\end{aligned}$$

となり $\boldsymbol{x}\in\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。よって $V\subseteq\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が示され $V=\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が成立する。以上により $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は V の基底である。

(8)

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{x}_1$$

が成立しているので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立ではない。$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{0}$ なので 1 個のベクトルの組と考えたとき 1 次独立である。$\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle\subseteq V$ は成立しているので逆を示す。$\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとすると，実数 a_1, a_2 が存在して

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2$$

と書ける。このとき

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2(2\boldsymbol{x}_1)=(a_1+2a_2)\boldsymbol{x}_1$$

となり $\boldsymbol{x}\in\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ が示される。$V\subseteq\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ なので逆の包含関係とあわせて $V=\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ が成立する。以上により $\boldsymbol{x}_1$ は V の基底である。

(9)

$$\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}_4-\boldsymbol{x}_3$$

が成立するので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ は 1 次独立ではない。$\boldsymbol{x}_4$ を除いた $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を考えるが，この組に対しても

$$\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2$$

が成立するので 1 次独立ではない。$\boldsymbol{x}_3$ も除いたベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を考える。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$c_1 + 2c_2 = 0, \quad 2c_1 + 3c_2 = 0, \quad 3c_1 + 4c_2 = 0, \quad 4c_1 + 5c_2 = 0$$

を得るがこれを解いて

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

を得る。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。$V = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$ が示されれば基底であることが分かる。$\langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle \subseteq \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \,\rangle = V$ は成立しているので逆向きの包含関係を示す。$\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとすると，実数 a_1, a_2, a_3, a_3 が存在して

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4$$

が成立している。ここで $\boldsymbol{x}_3 = -\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2$ および $\boldsymbol{x}_4 = -2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2$ が成立しているので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3(-\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2) + a_4(-2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2) \\ &= (a_1 - a_3 - 2a_4)\boldsymbol{x}_1 + (a_2 + 2a_3 + 3a_4)\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

となり $\boldsymbol{x} \in \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$ となる。よって $V \subseteq \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$ が示され $V = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$ が成立する。以上により $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は V の基底である。