線形解析 I 問題解説 #9

河野

演習問題 3.13　次のベクトル空間の次元を求めよ。

(1) $V = \mathbb{R}^2$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + 5y = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + 5y = 0, x + 3y = 0 \right\}$

(4) $V = \mathbb{R}^3$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 3z = 0 \right\}$

(6) $V = \mathbb{R}^4$

(7) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + 4y - z + w = 0 \right\}$

(8) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + 4y - z + w = 0, 2x + 3y + z - 4w = 0 \right\}$

(9) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + 4y - z + w = 0, 2x + 3y + z - 4w = 0, 4x + 11y - z - 2w = 0 \right\}$

(10) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(11) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(12) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$

(13) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(14) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

(15) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

基底を求めればそれを構成するベクトルの個数が次元なので，前節の問題と同様に解くことができる。

(1) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が V の基底であると予想される。これを証明する。

(a) 1 次独立性 ： $c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ が成立するとき，

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $c_1 = c_2 = 0$ となる。よって $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\mathbb{R}^2 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ を示す。$\mathbb{R}^2$ は 2 項数ベクトル全体の集合なので $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ は成立している。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルとすると

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$$

となる。よって $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ が成立し，$\mathbb{R}^2 \subseteq \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ が示される。以上より $\mathbb{R}^2 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ が成立する。(a),(b) より次元は 2 である。

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$ とすると $x = -5y$ が成立しているので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき $\boldsymbol{x}_1$ が V の基底であると予想される。

(a) 1 次独立性 ：$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ の任意のベクトルとすると，ある実数 α を用いて $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}_1$ と書かれている。

このとき

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-5\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$$

であり，$-5\alpha+5\alpha=0$ より $\boldsymbol{x}\in V$ となる。よって $\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle\subseteq V$ が成立する。逆に $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を V の任意のベクトルとすると $x+5y=0$ が成立している。このとき

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-5\\ 1\end{pmatrix}$$

より $\boldsymbol{x}\in\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle$ となり，$V\subseteq\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle$ となる。以上により $V=\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle$ が成立する。(a),(b) より次元は 1 である。

(3) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in V$ とすると

$$x+5y=0,\quad x+3y=0$$

が成立している。この連立方程式を解くと $x=0,y=0$ を得る。$\mathbf{0}\in V$ は常に成立している。よって $V=\{\,\mathbf{0}\,\}$ となっている。基底は空集合であり，次元は 0 である。

(4) $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であると予想される。

(a) 1 次独立性 ：$c_1+\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3=\mathbf{0}$ が成立するとき

$$c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より $c_1=c_2=c_3=0$ となる。よって 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\mathbb{R}^3$ は 3 項数ベクトル全体なので $\langle\,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\,\rangle\subseteq\mathbb{R}^3$ は成立している。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ を任意の 3 項数ベクトルとすると

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$$

となるので，$\boldsymbol{x}\in\langle\,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\,\rangle$ となり，$\mathbb{R}^3\subseteq\langle\,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\,\rangle$ となる。以上により $\mathbb{R}^3=\langle\,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\,\rangle$ が成立する。(a),(b) より次元 3 はである。

(5) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in V$ とすると $x+2y+3z=0$ が成立しており，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y-3z\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

となっている。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が基底と予想される。

(a) 1 次独立性 ：$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$ とおくと

$$c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $c_1 = c_2 = 0$ となる。よって 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の任意のベクトルとすると実数 α_1, α_2 が存在して

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

と書ける。$(-2\alpha_1 - 3\alpha_2) + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$ なので $\boldsymbol{x} \in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ が成立する。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を V の任意のベクトルとすると $x + 2y + 3z = 0$ が成立している。このとき

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y\boldsymbol{x}_1 + z\boldsymbol{x}_2$$

より $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となり, $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が成立する。以上により $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。(a),(b) より次元 2 はである。

(6) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ が $\mathbb{R}^4$ の基底であると予想される。

(a) 1 次独立性 ：$c_1 + \boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 + c_4\boldsymbol{e}_4 = \mathbf{0}$ が成立するとき

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ となる。よって 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\mathbb{R}^4$ は 4 項数ベクトル全体なので $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ は成立している。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in$

$\mathbb{R}^4$ を任意の 4 項数ベクトルとすると

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 + w\boldsymbol{e}_4$$

となるので, $\boldsymbol{x} \in \langle\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \,\rangle$ となり, $\mathbb{R}^4 \subseteq \langle\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \,\rangle$ となる。以上により $\mathbb{R}^4 = \langle\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \,\rangle$ が成立する。(a),(b) より次元 4 はである。

(7) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ とすると $x + 4y - z + w = 0$ が成立しており,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y + z - w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっている。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が基底と予想される。

(a) 1 次独立性 ：$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ とおくと

$$c_1\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる。よって 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\boldsymbol{x}$ を $\langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle$ の任意のベクトルとすると実数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が存在して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3 \\ &= \alpha_1\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。$(-4\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)+4\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$ なので $\boldsymbol{x}\in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle \subseteq V$ が成立する。逆に $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}$ を V の任意のベクトルとすると $x+4y-z+w=0$ が成立している。このとき

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4y+z-w\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} -4\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

より $\boldsymbol{x}\in\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ となり，$V\subseteq\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ が成立する。以上により $V=\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ となる。(a),(b) より次元 3 はである。

(8) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}\in V$ とすると $x+4y-z+w=0$ かつ $2x+3y+z-4w=0$ が成立している。この連立 1 次方程式を解く。基本変形を実行すると

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & -4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\text{ 行})-2\times(1\text{ 行})]{(2\text{ 行})\to}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 3 & -6 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{5}\times(2\text{ 行})]{(2\text{ 行})\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[(1\text{ 行})-4\times(2\text{ 行})]{(1\text{ 行})\to}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{19}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 0\end{pmatrix}$$

となるので与えられた連立 1 次方程式は連立一次方程式

$$x=-\frac{7}{5}z+\frac{19}{5}w,\quad y=\frac{3}{5}z-\frac{6}{5}w$$

と同値である。

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{5}z+\frac{19}{5}w\\ \frac{3}{5}z-\frac{6}{5}w\\ z\\ w\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} -\frac{7}{5}\\ \frac{3}{5}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} \frac{19}{5}\\ -\frac{6}{5}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

となっている。$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} -\frac{7}{5}\\ \frac{3}{5}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} \frac{19}{5}\\ -\frac{6}{5}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ が基底と予想される。

(a) 1 次独立性 ：$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ とおくと

$$c_1\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $c_1 = c_2 = 0$ となる。よって 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の任意のベクトルとすると実数 α_1, α_2 が存在して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 \\ &= \alpha_1\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{5}\alpha_1 + \frac{19}{5}\alpha_2 \\ \frac{3}{5}\alpha_1 - \frac{6}{5}\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と書ける。

$$\left(-\frac{7}{5}\alpha_1 + \frac{19}{5}\alpha_2\right) + 4\left(\frac{3}{5}\alpha_1 - \frac{6}{5}\alpha_2\right) - \alpha_1 + \alpha_2 = 0,\ \text{かつ}$$
$$2\left(-\frac{7}{5}\alpha_1 + \frac{19}{5}\alpha_2\right) + 3\left(\frac{3}{5}\alpha_1 - \frac{6}{5}\alpha_2\right) + \alpha_1 - 4\alpha_2 = 0$$

が成立しているので $\boldsymbol{x} \in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ が成立する。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ を V の任意のベクトルとすると前に計算したように

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5}z + \frac{19}{5}w \\ \frac{3}{5}z - \frac{6}{5}w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっている。$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となり，$V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が成立する。以上により $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。(a),(b) より次元 2 はである。

(9)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ とすると $x + 4y - z + w = 0$ かつ $2x + 3y + z - 4w = 0$ かつ $4x + 11y -$

$z-2w=0$ が成立している。この連立 1 次方程式を解く。基本変形を実行すると

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&4&-1&1&0\\2&3&1&-4&0\\4&11&-1&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{行})-2\times(2\text{行})]{(3\text{行})\to}\begin{pmatrix}1&4&-1&1&0\\2&3&1&-4&0\\0&5&-3&6&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\text{行})-2\times(2\text{行})]{(2\text{行})\to}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&1&0\\0&-5&3&-6&0\\0&5&-3&6&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{行})+\times(2\text{行})]{(3\text{行})\to}\begin{pmatrix}1&4&-1&1&0\\0&-5&3&-6&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{5}\times(2\text{行})]{(2\text{行})\to}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&1&0\\0&1&-\frac{3}{5}&\frac{6}{5}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(1\text{行})-4\times(2\text{行})]{(1\text{行})\to}\begin{pmatrix}1&0&\frac{7}{5}&-\frac{19}{5}&0\\0&1&-\frac{3}{5}&\frac{6}{5}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

となるので与えられた連立 1 次方程式は連立一次方程式

$$x=-\frac{7}{5}z+\frac{19}{5}w,\quad y=\frac{3}{5}z-\frac{6}{5}w$$

と同値である。この連立 1 次方程式は (8) と同じなので V も (8) と同じである。よって V は 2 次元である。

(10) $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ が V の基底であると予想される。

(a) 1 次独立性 ：$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$ とおくと

$$c_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

が成立しているので，

$$c_1+3c_2=0,\quad 3c_1+c_2=0$$

が成立している。$c_1=-3c_2=-3(-3c_1)=9c_1$ より $8c_1=0$ となり，$c_1=0$ を得る。よって $c_1=c_2=0$ となる。よって 1 次独立である。

(b) 生成 ：$V=\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\rangle$ は定義なので成立している。(a),(b) より次元 2 はである。

(11) $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1$ が V の基底であると予想される。いきなり予想を書いているが，これは予備的計算を別に行い 2 つのベクトルの組が 1 次独立でないことをチェックしていることを前提にした解答である。予備的計算を解答に書くと次の様になる (予備的計算の部分は青字で書く)。$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ とおく。$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$ が成立しているとする。

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

より

$$c_+2c_2=0$$

となる。この連立 1 次方程式の解として，例えば $c_1 = -2, c_2 = 1$ が存在する。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立ではない。

(a) 1 次独立性 ：$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ の任意のベクトルとすると実数 α が存在して $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}_1$ となる。

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}_1 = \alpha \boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2$$

と書けるので $\boldsymbol{x} \in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \subseteq V$ となる。逆に $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2$ とおくと $\boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{x}_1$ なので

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + 2\alpha_2 \boldsymbol{x}_1 = (\alpha_1 + 2\alpha_2)\boldsymbol{x}_1$$

となる。$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となり。$V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ が成立する。以上により $V = \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となる。(a),(b) より次元 1 はである。

(12) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が V の基底であると予想される。

(a) 1 次独立性 ：$c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ とおくと

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立しているので，

$$c_1 + 3c_2 = 0, \quad 2c_1 + 2c_2 = 0, \quad 3c_1 + c_2 = 0$$

が成立している。$c_1 = -3c_2 = -3(-3c_1) = 9c_1$ より $8c_1 = 0$ となり，$c_1 = 0$ を得る。よって $c_1 = c_2 = 0$ となる。よって 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の任意のベクトルとすると実数 α_1, α_2 が存在して $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2$ となる。

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3$$

と書けるので $\boldsymbol{x} \in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ となる。逆に $\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとすると $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{x}_3$ と書ける。$\boldsymbol{x}_3 = \frac{5}{4}\boldsymbol{x}_1 + \frac{5}{4}\boldsymbol{x}_2$ なので

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \alpha_3 \left(\frac{5}{4}\boldsymbol{x}_1 + \frac{5}{4}\boldsymbol{x}_2 \right) = \left(\alpha_1 + \frac{5}{4}\alpha_3 \right) \boldsymbol{x}_1 + \left(\alpha_2 + \frac{5}{4}\alpha_3 \right) \boldsymbol{x}_2$$

となる。$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となり。$V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が成立する。以上により $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。(a),(b) より次元 2 はである。

(13) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が V の基底であると予想される。

(a) 1 次独立性 ：$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ とおくと

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立しているので,

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 = 0, \quad -3c_1 - 2c_2 = 0$$

が成立している。$c_1 = 0$ より $c_1 = c_2 = 0$ となる。よって 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の任意のベクトルとすると実数 α_1, α_2 が存在して $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2$ となる。

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3$$

と書けるので $\boldsymbol{x} \in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ となる。逆に $\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとすると $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3$ と書ける。$\boldsymbol{x}_3 = 2\boldsymbol{x}_2$ なので

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + 2\alpha_3\boldsymbol{x}_2 = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\,\boldsymbol{x}_2$$

となる。$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となり。$V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が成立する。以上により $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。
(a),(b) より次元 2 はである。

(14) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1$ が V の基底であると予想される。

(a) 1 次独立性 ：$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ の任意のベクトルとすると実数 α が存在して $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}_1$ となる。

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}_1 = \alpha\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3$$

と書けるので $\boldsymbol{x} \in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \subseteq V$ となる。逆に $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3$ とおくと $\boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 = 3\boldsymbol{x}_1$ なので

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + 2\alpha_2\boldsymbol{x}_1 + 3\alpha_3\boldsymbol{x}_1 = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3)\boldsymbol{x}_1$$

となる。$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となり。$V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ が成立する。以上により $V = \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となる。(a),(b) より次元 1 はである。

(15) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が V の基底であると予想される。

(a) 1 次独立性 ：$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ とおくと

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立しているので,

$$2c_1 = 0, \quad 3c_2 = 0$$

が成立している。$c_1 = c_2 = 0$ となる。よって 1 次独立である。

(b) 生成 ：$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}$ を $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の任意のベクトルとすると実数 α_1, α_2 が存在して $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2$ となる。

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3$$

と書けるので $\boldsymbol{x} \in V$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq V$ となる。逆に $\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとすると $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3$ と書ける。$\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{5}\boldsymbol{x}_1 + \dfrac{1}{5}\boldsymbol{x}_2$ なので

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\left(\frac{1}{5}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{5}\boldsymbol{x}_2\right) = \left(\alpha_1 + \frac{1}{5}\alpha_3\right)\boldsymbol{x}_1 + \left(\alpha_2 + \frac{1}{5}\alpha_3\right)\boldsymbol{x}_2$$

となる。$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となり。$V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が成立する。以上により $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となる。(a),(b) より次元 2 はである。