線型代数 I 問題解説 #10

河野

演習問題 3.14 $T : U \longrightarrow V$ を線形写像とする。このとき $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\ T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$ が成立することを示せ。

$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$ が成立している。両辺から $T(\mathbf{0})$ を引くと $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を得る。

$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ なので $\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) = T(\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})) = T(\boldsymbol{x}) + T(-\boldsymbol{x})$ が成立している。両辺から $T(\boldsymbol{x})$ を引くと $T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$ を得る。

演習問題 3.15 定理 3.18 を証明せよ。

$\boldsymbol{x}$ を $\mathbb{R}^p$ の任意のベクトルとする。S の表現行列が B なので $S(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ が成立している。$\boldsymbol{y}$ を $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルとする。T の表現行列が A なので $T(\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{y}$ が成立している。よって

$$T \circ S(\boldsymbol{x}) = T(S(\boldsymbol{x})) = T(B\boldsymbol{x}) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$$

が成立する。これは線形写像 $T \circ S$ の表現行列が AB であることを意味している。

演習問題 3.16 T を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像で，3 項数ベクトルに対し z 軸に関して θ 回転したベクトルを対応させる写像とする。このとき T の表現行列を求めよ。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする。このベクトルを z 軸に関して θ 回転させたベクトルを $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とする。このとき $z = z'$ であり，x, y と x', y' は平面における回転と見なすことができるので

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta, y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

という関係にある。よって

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

であり，T を表現する行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 3.17　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とする。V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ に対し $T(\boldsymbol{x}_1), \ldots, T(\boldsymbol{x}_n)$ が 1 次独立のとき，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ も 1 次独立であることを示せ。

この逆は成り立たない。線形写像 T とベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ で $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が 1 次独立であり，$T(\boldsymbol{x}_1), \ldots, T(\boldsymbol{x}_n)$ が 1 次独立でない例をあげよ。

$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。これを T で写すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} = T(\boldsymbol{0}) &= T(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n) \\ &= T(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}) + T(c_n\boldsymbol{x}_n) \\ &= T(c_1\boldsymbol{x}_1) + T(c_2\boldsymbol{x}_2) + \cdots + T(c_n\boldsymbol{x}_n) \\ &= c_1T(\boldsymbol{x}_1) + c_2T(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{x}_n)\end{aligned}$$

が成立する。$T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \ldots, T(\boldsymbol{x}_n)$ は 1 次独立なので $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である。よって $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ も 1 次独立である。

逆が成り立たない例は沢山ある。簡単な例を。$V = U = \mathbb{R}^2$ とし，T を任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{0}$ を対応させる写像とする。これは線型写像である。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x}_1$ は $\boldsymbol{0}$ ではないので 1 次独立である。$T(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$ なので $T(\boldsymbol{x}_1)$ は 1 次独立ではない。

演習問題 3.18　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(T) \leq V$, $\mathrm{Ker}(T) \leq U$ を示せ。

$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \boldsymbol{x} \in U \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \,\}$ なので，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ を U の任意のベクトルとすると $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, $T(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0}$ が成立している。このとき

$$T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

より $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in \mathrm{Ker}(T)$ が成立する。α を任意の実数とし，$\boldsymbol{x}$ を $\mathrm{Ker}(T)$ の任意のベクトルとする。

$$T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

なので $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ が成立する。以上により $\mathrm{Ker}(T)$ は U の部分空間である。

$\mathrm{Im}(T) = \{\, \boldsymbol{y} \in V \mid \text{ある}\boldsymbol{x} \in U \text{ が存在して}\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) \,\}$ なので，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ を $\mathrm{Im}(T)$ の任意のベクトルとすると，ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in U$ が存在して $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}' = T(\boldsymbol{x}')$ が成立している。$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x}') = T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}')$ であり，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in U$ なので $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' \in \mathrm{Im}(T)$ が成立する。α を任意の実数とし，$\boldsymbol{y}$ を $\mathrm{Im}(T)$ の任意のベクトルとする。

$$\alpha\boldsymbol{y} = \alpha T(\boldsymbol{x}) = T(\alpha\boldsymbol{x})$$

であり，$\alpha\boldsymbol{x} \in U$ なので $\alpha\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T)$ が成立する。以上により $\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間である。

演習問題 3.19　次の行列 A に対し T_A の核 $\mathrm{Ker}(T_A)$ と像 $\mathrm{Im}(T_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

ベクトル空間を表す方法としては $\{\boldsymbol{x} \in V \mid x, y$ 等に関する式$\}$ と $\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ があった。ここでは両方の形とも求める。

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \\ x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成立している。このとき $x = y = 0$ となる。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ は $T_A(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ となるので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x = 0, y = 0 \right\}$$

となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると，$x = y = 0$ なので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ なので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

とも表すことができる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると，あるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立している。即ち連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+y &= X \\ x+2y &= Y \\ x+3y &= Z \end{cases}$$

が解を持つ。ここで X, Y, Z は既知数，x, y, z を未知数と見なしている。係数拡大行列を基本変形していく。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 1 & 2 & 0 & Y \\ 1 & 3 & 0 & Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行})-(2\text{ 行})]{(3\text{ 行})\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 1 & 2 & 0 & Y \\ 0 & 1 & 0 & Z-Y \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行})-(1\text{ 行})]{(2\text{ 行})\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & Y-X \\ 0 & 1 & 0 & Z-Y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3\text{ 行})-(2\text{ 行})]{(3\text{ 行})\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行})-(2\text{ 行})]{(1\text{ 行})\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2X-Y \\ 0 & 1 & 0 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は連立 1 次方程式が解を持つことであり，$X - 2Y + Z = 0$ なので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \;\middle|\; X-2Y+Z=0 \right\}$$

である。また $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T_A)$ のとき

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2Y-Z\\Y\\Z\end{pmatrix} = Y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $Y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ の形のベクトルは $\mathrm{Im}(T_A)$ に属するので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

とも書ける。

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ 3x+2y+8z \\ 2x+y+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成立している。係数拡大行列を変形してゆく。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) - 2\times(1\text{ 行})]{(3\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) - 3\times(1\text{ 行})]{(2\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}\times(2\text{ 行})]{(2\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) - 3\times(2\text{ 行})]{(3\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) + (2\text{ 行})]{(1\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき $x+2z=0$ かつ $y+z=0$ となる。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が

$$x+2z=0, \quad y+z=0$$

をみたすとき,

$$T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x-y+z \\ 3x+2y+8z \\ 2x+y+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+2z)-(y+z) \\ 3(x+2z)+2(y+z) \\ 2(x+2z)+(y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x+2z=0, y+z=0 \right\}$$

となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると，基本変形に関する計算より $x+2z=0, y+z=0$ となるので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $z\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ なので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも表すことができる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると，あるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立している。即ち連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y + z & = & X \\ 3x + 2y + 8z & = & Y \\ 2x + y + 5z & = & Z \end{cases}$$

が解を持つ。ここで X, Y, Z は既知数，x, y, z を未知数と見なしている。係数拡大行列を基本変形していく。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 3 & 2 & 8 & Y \\ 2 & 1 & 5 & Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{行}) - 2 \times (1\text{行})]{(3\text{行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 3 & 2 & 8 & Y \\ 0 & 3 & 3 & Z - 2X \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{行}) - 3 \times (1\text{行})]{(2\text{行}) \to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 0 & 5 & 5 & Y - 3X \\ 0 & 3 & 3 & Z - 2X \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \times (2\text{行})]{(2\text{行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 0 & 1 & 1 & \frac{Y}{5} - \frac{3X}{5} \\ 0 & 3 & 3 & Z - 2X \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{行}) - 3 \times (2\text{行})]{(3\text{行}) \to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & X \\ 0 & 1 & 1 & \frac{Y}{5} - \frac{3X}{5} \\ 0 & 0 & 0 & Z - \frac{X}{5} - \frac{3Y}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{行}) + (2\text{行})]{(1\text{行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{2X}{5} + \frac{Y}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{Y}{5} - \frac{3X}{5} \\ 0 & 0 & 0 & Z - \frac{X}{5} - \frac{3Y}{5} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は連立 1 次方程式が解を持つことなので，$Z - \frac{X}{5} - \frac{3Y}{5} = 0$ なので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \middle| \, 5Z - X - 3Y = 0 \right\}$$

である。また $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T_A)$ のとき

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5Z - 3Y \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = Y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $Y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のベクトルは $\mathrm{Im}(T_A)$ に属するので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも書ける。

(3) 前問を解くときに基本変形を 2 つ行ったが，2 番目の基本変形で $X = Y = Z = 0$ とすると，1 番目の基本変形になる。これは他の問題でも同じなので，最初にこの形の基本変形を行っておく。以下他の問題でも同様。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 2 & 3 & 4 & Y \\ 3 & 4 & 5 & Z \\ 4 & 5 & 6 & W \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) - (3\text{ 行})]{(4\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 2 & 3 & 4 & Y \\ 3 & 4 & 5 & Z \\ 1 & 1 & 1 & W-Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{(3\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 2 & 3 & 4 & Y \\ 1 & 1 & 1 & Z-Y \\ 1 & 1 & 1 & W-Z \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{(2\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 1 & 1 & Z-Y \\ 1 & 1 & 1 & W-Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{(4\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 1 & 1 & Z-Y \\ 0 & 0 & 0 & W-Z-Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{(3\text{ 行}) \to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & W-Z-Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{(1\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2X-Y \\ 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & W-Z-Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行})]{(1\text{ 行})\leftrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 1 & 2 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & W-Z-Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{(1\text{ 行}) \to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2Y-3X \\ 0 & 1 & 2 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \\ 0 & 0 & 0 & W-Z-Y+X \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \\ 3x+4y+5z \\ 4x+5y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成立している。前述の基本変形において $X = Y = Z = W = 0$ とおいたものを考えると，このとき $x - z = 0$ かつ $y + 2z = 0$ が成立している。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が

$$x - z = 0, \quad y + 2z = 0$$

をみたすとき，

$$T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \\ 3x+4y+5z \\ 4x+5y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-z)+2(y+2z) \\ 2(x-z)+3(y+2z) \\ 3(x-z)+4(y+2z) \\ 4(x-z)+5(y+2z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x-z=0, y+2z=0 \right\}$$

となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると，基本変形に関する計算より $x-z=0, y+2z=0$ となるので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ なので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも表すことができる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると，あるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立している。即ち連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+2y+3z &= X \\ 2x+3y+4z &= Y \\ 3x+4y+5z &= Z \\ 4x+5y+6z &= W \end{cases}$$

が解を持つ。ここで X, Y, Z, W は既知数，x, y, z を未知数と見なしている。前述の基本変形より $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は連立 1 次方程式が解を持つことなので，

$X-2Y+Z=0$ かつ $X-Y-Z+W=0$ なので

$$\mathrm{Im}(T_A)=\left\{\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}\middle|\, X-2Y+Z=0, X-Y-Z+W=0\right\}$$

である。$\mathrm{Im}(T_A)$ を生成系で表すため連立 1 次方程式

$$X-2Y+Z=0,\quad X-Y-Z+W=0$$

に関し基本変形を行う。ただし今の場合 X,Y,Z,W は未知数と見なしている。

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&0&0\\1&-1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(1\text{ 行})-(2\text{ 行})]{(1\text{ 行})\to}\begin{pmatrix}0&-1&2&-1&0\\1&-1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\text{ 行})]{(1\text{ 行})\leftrightarrow}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&-1&2&-1&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[-1\times(2\text{ 行})]{(2\text{ 行})\to}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&1&-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(1\text{ 行})+(2\text{ 行})]{(1\text{ 行})\to}\begin{pmatrix}1&0&-3&2&0\\0&1&-2&1&0\end{pmatrix}$$

よって連立 1 次方程式は

$$X=3Z-2W,\quad Y=2Z-W$$

となる。よって $\boldsymbol{y}\in\mathrm{Im}(T_A)$ のとき

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3Z-2W\\2Z-W\\Z\\W\end{pmatrix}=Z\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}+W\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $Z\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}+W\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ の形のベクトルは $\mathrm{Im}(T_A)$ に属するので

$$\mathrm{Im}(T_A)=\left\langle\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

とも書ける。

(4) $$\begin{pmatrix}1&2&3&4&X\\2&3&4&5&Y\\3&4&5&6&Z\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{ 行})-(1\text{ 行})]{(3\text{ 行})\to}\begin{pmatrix}1&2&3&4&X\\2&3&4&5&Y\\2&2&2&2&Z-X\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2\text{ 行})-(1\text{ 行})]{(2\text{ 行})\to}\begin{pmatrix}1&2&3&4&X\\1&1&1&1&Y-X\\2&2&2&2&Z-X\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{ 行})-2\times(2\text{ 行})]{(3\text{ 行})\to}\begin{pmatrix}1&2&3&4&X\\1&1&1&1&Y-X\\0&0&0&0&Z-2Y+X\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 行})-(2\text{ 行})]{(1\text{ 行})\to}\begin{pmatrix}0&1&2&3&2X-Y\\1&1&1&1&Y-X\\0&0&0&0&Z-2Y+X\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\text{ 行})]{(1\text{ 行})\leftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1&1&Y-X\\0&1&2&3&2X-Y\\0&0&0&0&Z-2Y+X\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 行})-(2\text{ 行})]{(1\text{ 行})\to}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2Y-3X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z+4w \\ 2x+3y+4z+5w \\ 3x+4y+5z+6w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

が成立している。前述の基本変形において $X = Y = Z = 0$ とおいたものを考えると，このとき $x - z - 2w = 0$ かつ $y + 2z + 3w = 0$ が成立している。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が

$$x - z - 2w = 0, \quad y + 2z + 3w = 0$$

をみたすとき，

$$T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x+2y+3z+4w \\ 2x+3y+4z+5w \\ 3x+4y+5z+6w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-z-2w)+2(y+2z+3w) \\ 2(x-z-2w)+3(y+2z+3w) \\ 3(x-z-2w)+4(y+2z+3w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \, x - z - 2w = 0, y + 2z + 3w = 0 \right\}$$

となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると，基本変形に関する計算より $x-z-2w = 0, y+2z+3w = 0$ となるので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $\begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ なので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも表すことができる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると，あるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立している。即ち連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w &= X \\ 2x+3y+4z+5w &= Y \\ 3x+4y+5z+6w &= Z \end{cases}$$

が解を持つ。ここで X, Y, Z は既知数，x, y, z, w を未知数と考えている。前述の基本変形より $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は連立 1 次方程式が解を持つことなので，$X-2Y+Z=0$ なので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \middle| X-2Y+Z=0 \right\}$$

である。よって $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T_A)$ のとき

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Y-Z \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = Y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $Y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のベクトルは $\mathrm{Im}(T_A)$ に属するので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも書ける。

(5) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成立している。このとき $w = 0$ が成立している。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が

$$w = 0$$

をみたすとき，

$$T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0x + 0y + 0z + 1w \\ 0x + 0y + 0z + 0w \\ 0x + 0y + 0z + 0w \\ 0x + 0y + 0z + 0w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \, w = 0 \right\}$$

となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると，$w = 0$ となるので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(T_A)$ なので

$$\mathrm{Ker}(T_A)=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

とも表すことができる。

$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}\in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると，あるベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y}=T_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ が成立している。即ち連立 1 次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl}0x+0y+0z+1w&=&X\\0x+0y+0z+0w&=&Y\\0x+0y+0z+0w&=&Z\\0x+0y+0z+0w&=&W\end{array}\right.$$

が解を持つ。解を持つ必要十分条件は

$$Y=0,\quad Z=0,\quad W=0$$

である。$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は連立 1 次方程式が解を持つことなので，

$$\mathrm{Im}(T_A)=\left\{\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}\;\middle|\; Y=0,Z=0,W=0\right\}$$

である。よって $\boldsymbol{y}\in \mathrm{Im}(T_A)$ のとき

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\0\\0\\0\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $X\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ の形のベクトルは $\mathrm{Im}(T_A)$ に属するので

$$\mathrm{Im}(T_A)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

とも書ける。

(6) $\begin{pmatrix}0&1&0&1&X\\1&0&0&1&Y\\0&0&1&1&Z\\1&1&0&0&W\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\,行)]{(1\,行)\leftrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&1&Y\\0&1&0&1&X\\0&0&1&1&Z\\1&1&0&0&W\end{pmatrix}\xrightarrow[(4\,行)-(1\,行)]{(4\,行)\rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&1&Y\\0&1&0&1&X\\0&0&1&1&Z\\0&1&0&-1&W-Y\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[(4\,行)-(2\,行)]{(4\,行)\rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&1&Y\\0&1&0&1&X\\0&0&1&1&Z\\0&0&0&-2&W-Y-X\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}\times(4\,行)]{(4\,行)\rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&1&Y\\0&1&0&1&X\\0&0&1&1&Z\\0&0&0&1&\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}-\frac{W}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\,行)-(4\,行)]{(1\,行)\rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}+\frac{W}{2}\\0&1&0&1&X\\0&0&1&1&Z\\0&0&0&1&\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}-\frac{W}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\,行)-(4\,行)]{(2\,行)\rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}+\frac{W}{2}\\0&1&0&0&\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}+\frac{W}{2}\\0&0&1&1&Z\\0&0&0&1&\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}-\frac{W}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3\,行)-(4\,行)]{(3\,行)\rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}+\frac{W}{2}\\0&1&0&0&\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}+\frac{W}{2}\\0&0&1&0&Z-\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}+\frac{W}{2}\\0&0&0&1&\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}-\frac{W}{2}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(T_A)$ とすると

$$T_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+w\\x+w\\z+w\\x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

が成立している。前述の基本変形において $X = Y = Z = W = 0$ とおいたものを考えると，このとき $x = 0$ かつ $y = 0$ かつ $z = 0$ かつが $w = 0$ 成立している。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が

$$x = y = z = w = 0$$

をみたすとき，

$$T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} y+w \\ x+w \\ z+w \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \, x = y = z = w = 0 \right\} = \{ \boldsymbol{0} \}$$

となる。$\mathrm{Ker}(T_A)$ を生成系で「無理やりにでも」表すとすると

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも表すことができる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると，あるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立している。即ち連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y+w &=& X \\ x+w &=& Y \\ z+w &=& Z \\ x+y &=& W \end{array} \right.$$

が解を持つ。ここで X, Y, Z, W は既知数，x, y, z, w を未知数と考えている。前述の基本変形より与えられた連立 1 次方程式は常に解を持つ。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は連立 1 次方程式が解を持つことなので，X, Y, Z, W になんらの制限はない。よって

$$\mathrm{Im}(T_A) = \mathbb{R}^4$$

である。$\mathbb{R}^4$ を生成するベクトルの組は色々あるがここでは基本ベクトルを選んでおこう。

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(7) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

が成立している。逆に任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ に対し

$$T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0x + 0y + 0z + 0w \\ 0x + 0y + 0z + 0w \\ 0x + 0y + 0z + 0w \\ 0x + 0y + 0z + 0w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \mathbb{R}^4$$

となる。

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも表すことができる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると，あるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立している。即ち連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0x + 0y + 0z + 0w & = & X \\ 0x + 0y + 0z + 0w & = & Y \\ 0x + 0y + 0z + 0w & = & Z \\ 0x + 0y + 0z + 0w & = & W \end{array} \right.$$

が解を持つ。解を持つ必要十分条件は

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \quad W=0$$

である。よって

$$\mathrm{Im}(T_A)=\left\{ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \middle| \, X=0, Y=0, Z=0, W=0 \right\} = \{\, \mathbf{0} \,\}$$

である。「無理やり」生成系で書けば

$$\mathrm{Im}(T_A)=\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも書ける。

(8) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \\ 4 & 5 & 6 & 7 & S \\ 5 & 6 & 7 & 8 & T \end{pmatrix} \xrightarrow[(5\,行)-(1\,行)]{(5\,行)\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \\ 4 & 5 & 6 & 7 & S \\ 4 & 4 & 4 & 4 & T-X \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\,行)-(1\,行)]{(4\,行)\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \\ 3 & 3 & 3 & 3 & S-X \\ 4 & 4 & 4 & 4 & T-X \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\,行)-(1\,行)]{(3\,行)\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 2 & 2 & 2 & 2 & Z-X \\ 3 & 3 & 3 & 3 & S-X \\ 4 & 4 & 4 & 4 & T-X \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\,行)-(1\,行)]{(2\,行)\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 2 & 2 & 2 & 2 & Z-X \\ 3 & 3 & 3 & 3 & S-X \\ 4 & 4 & 4 & 4 & T-X \end{pmatrix} \xrightarrow[(5\,行)-4\times(2\,行)]{(5\,行)\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 2 & 2 & 2 & 2 & Z-X \\ 3 & 3 & 3 & 3 & S-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T+3X-4Y \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\,行)-3\times(2\,行)]{(4\,行)\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 2 & 2 & 2 & 2 & Z-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S+2X-3Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T+3X-4Y \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\,行)-2\times(2\,行)]{(3\,行)\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z+X-2Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S+2X-3Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T+3X-4Y \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\,行)-(2\,行)]{(1\,行)\to}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z+X-2Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S+2X-3Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T+3X-4Y \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\,行)]{(1\,行)\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z+X-2Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S+2X-3Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T+3X-4Y \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\,行)-(2\,行)]{(1\,行)\to}$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & -2 & 2Y-3X \\
0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\
0 & 0 & 0 & 0 & Z+X-2Y \\
0 & 0 & 0 & 0 & S+2X-3Y \\
0 & 0 & 0 & 0 & T+3X-4Y
\end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると

$$
T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z+4w \\ 2x+3y+4z+5w \\ 3x+4y+5z+6w \\ 4x+5y+6z+7w \\ 5x+6y+7z+8w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}
$$

が成立している。前述の基本変形において $X = Y = Z = S = T = 0$ とおいたものを考えると，このとき $x - z - 2w = 0$ かつ $y + 2z + 3w = 0$ が成立している。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が

$$
x - z - 2w = 0, \quad y + 2z + 3w = 0
$$

をみたすとき，

$$
T_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x+2y+3z+4w \\ 2x+3y+4z+5w \\ 3x+4y+5z+6w \\ 4x+5y+6z+7w \\ 5x+6y+7z+8w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-z-2w)+2(y+2z+3w) \\ 2(x-z-2w)+3(y+2z+3w) \\ 3(x-z-2w)+4(y+2z+3w) \\ 4(x-z-2w)+5(y+2z+3w) \\ 5(x-z-2w)+6(y+2z+3w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となるので

$$
\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \, x - z - 2w = 0, y + 2z + 3w = 0 \right\}
$$

となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると，基本変形に関する計算より $x - z - 2w = 0, y + 2z + 3w =$

0 となるので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $\begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ なので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも表すことができる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ S \\ T \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ とすると，あるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立している。即ち連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w &= X \\ 2x+3y+4z+5w &= Y \\ 3x+4y+5z+6w &= Z \\ 4x+5y+6z+7w &= S \\ 5x+6y+7z+8w &= T \end{cases}$$

が解を持つ。ここで X, Y, Z, S, T は既知数，x, y, z, w を未知数と考えている。前述の基本変形より $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ S \\ T \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ に含まれる必要十分条件は連立 1 次方程式が解を持つことなので，$X-2Y+Z=0$ かつ $2X-3Y+S=0$ かつ $3X-4Y+T=0$ なので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ S \\ T \end{pmatrix} \middle| \, X-2Y+Z=0, 2X-3Y+S=0, 3X-4Y+T=0 \right\}$$

である。今までは連立 1 次方程式の解をパラメータ表示するとき後ろにあるパラメータを用いて前のパラメータを表してきたが，今の場合すでに X, Y で他のパラメータを表す形になっているの

で，それを採用する。よって $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T_A)$ のとき

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ S \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -x+2Y \\ -2X+3Y \\ -3X+4Y \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $X\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ の形のベクトルは $\mathrm{Im}(T_A)$ に属するので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とも書ける。

演習問題 *3.20　T をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とする。このとき

$$\dim U = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

が成立する事を示せ。**ヒント**: $\mathrm{Ker}(T)$ の基底と $\mathrm{Im}(T)$ の基底から U の基底を構成する。$\mathrm{Ker}(T)$ の基底を $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s$，$\mathrm{Im}(T)$ の基底を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_t$ とする。各 $\boldsymbol{v}_i$ に対し $T(\boldsymbol{w}_i) = \boldsymbol{v}_i$ となるベクトル $\boldsymbol{w}_i$ をとる。このとき $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_t$ が U の基底になることを示す。

　ヒントの様に $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_t$ を選ぶ。$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s$ は $\mathrm{Ker}(T)$ の元であるので各 i $(i = 1, \dots, s)$ に対し $T(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{0}$ が成立している。

$$\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{u}_s + \beta_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_t\boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} &= T(\boldsymbol{0}) \\
&= T(\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{u}_s + \beta_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_t\boldsymbol{w}_t) \\
&= \alpha_1 T(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + \alpha_s T(\boldsymbol{u}_s) + \beta_1 T(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + \beta_t T(\boldsymbol{w}_t) \\
&= \alpha_1\boldsymbol{0} + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{0} + \beta_1 T(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + \beta_t T(\boldsymbol{w}_t) \\
&= \beta_1 T(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + \beta_t T(\boldsymbol{w}_t)
\end{aligned}$$

が成立している。$\boldsymbol{v}_i = T(\boldsymbol{w}_i)$ $(i = 1, \dots, t)$ であり，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_t$ は 1 次独立なので，$\beta_1 = \cdots = \beta_t = 0$ が成立している。よって $\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_t\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{0}$ が成立している。$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s$ は 1 次独立なので $\alpha_1 = \cdots = \alpha_t = 0$ である。よって $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_t$ は 1 次独立である。

$\boldsymbol{x}$ を U の任意のベクトルとする。$T(\boldsymbol{x})$ は $\mathrm{Im}(T)$ のベクトルであり，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_t$ は $\mathrm{Im}(T)$ の基底なので，実数 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ が存在して

$$T(\boldsymbol{x}) = \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_t\boldsymbol{v}_t$$

と表すことができる。

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \beta_1\boldsymbol{w}_1 - \cdots - \beta_t\boldsymbol{w}_t$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{x}') &= T(\boldsymbol{x} - \beta_1\boldsymbol{w}_1 - \cdots - \beta_t\boldsymbol{w}_t) \\
&= T(\boldsymbol{x}) - \beta_1 T(\boldsymbol{w}_1) - \cdots - \beta_t T(\boldsymbol{w}_t) \\
&= T(\boldsymbol{x}) - \beta_1\boldsymbol{v}_1 \cdots - \beta_t\boldsymbol{v}_t \\
&= \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

となるので $\boldsymbol{x}' \in \mathrm{Ker}(T)$ となる。$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s$ は $\mathrm{Ker}(T)$ の基底なので，$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ が存在して

$$\boldsymbol{x}' = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{u}_s$$

と表すことができる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}' + \beta_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_t\boldsymbol{w}_t \\
&= \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{u}_s + \beta_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_t\boldsymbol{w}_t
\end{aligned}$$

となるので，

$$U = \langle\, \boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_t \,\rangle$$

が示される。以上により $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_t$ は U の基底であることが示された。

演習問題 3.21　(5)，(6) を除き上で述べたことを証明せよ。

(1)　最初に $a=0$ の場合を考える。$1,2\in\mathbb{R}$ に対し $T(1)=a1=0$ であり，$T(2)=a2=0$ なので T は単射ではない。

よって $a\neq 0$ とする。$x,x'\in\mathbb{R}$ に対し $T(x)=T(x')$ が成立しているとする。$T(x)=ax$ なので $ax=ax'$ が成立している。$a\neq 0$ より $x=x'$ となるので T は単射であることが分かる。

任意の $y\in\mathbb{R}$ に対し $x=\dfrac{y}{x}$ とおくと $T(x)=a\dfrac{y}{a}=y$ となるので T は全射である。

(2)　$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ に対し $B=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とおくと $BA=AB=E$(単位行列) が成立している。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in\mathbb{R}^2$ に対し $T(\boldsymbol{x})=T(\boldsymbol{x}')$ が成立しているとする。$A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}'$ の左から B をかけると $B(A\boldsymbol{x})=(BA)\boldsymbol{x}=E\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ であり，$B(A\boldsymbol{x}')=(BA)\boldsymbol{x}'=E\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}'$ なので，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ となる。T は単射である。

$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ を任意のベクトルとする。$\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y}$ とおく。$T(\boldsymbol{x})=A(B\boldsymbol{y})=(AB)\boldsymbol{y}=E\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$ となるので T は全射である。

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ を U のベクトルとする。$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}')$ が成立しているとする。$T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, T(\boldsymbol{x}') = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ なので $x = x', y = y'$ が成立している。$x + y + z = 0$ かつ $x' + y' + z' = 0$ より $z = z'$ となり，T が単射であることが分かる。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルとする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y-z \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x} \in U$ であり，$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ となる。T は全射であることが分かる。

(4) z 軸に関する $-\theta$ 回転に対応する写像を S とすると，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $T(S(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}, S(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ が成立している。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3$ に対し $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}')$ が成立しているとする。$S(T(\boldsymbol{x})) = S(T(\boldsymbol{x}'))$ であり，$S(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$，$S(T(\boldsymbol{x}')) = \boldsymbol{x}'$ なので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ となる。よって T は単射である。

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ を任意のベクトルとする。$\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{y})$ とおくと $T(\boldsymbol{x}) = T(S(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$ となる。よって T は全射である。

演習問題 3.22　線型写像 $T : U \to V$ が単射である必要十分条件は $\mathrm{Ker}(T) = \{\, \mathbf{0} \,\}$ であることを示せ。

$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成立するので $\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(T)$ は常に成立している。即ち $\{\, \mathbf{0} \,\} \subseteq \mathrm{Ker}(T)$ は常に成立する。

T が単射であるとする。$\boldsymbol{x}$ を $\mathrm{Ker}(T)$ の任意のベクトルとすると，$T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ が成立している。$T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0})$ であり，T が単射なので $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となる。このとき $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \{\, \mathbf{0} \,\}$ となるので，$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \mathbf{0} \,\}$ が成立している。

逆に $\mathrm{Ker}(T) = \{\, \mathbf{0} \,\}$ が成立しているとする。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ を $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}')$ となる U の任意のベクトルとする。このとき $T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x}') = \mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \in \mathrm{Ker}(T)$ となる。$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \mathbf{0} \,\}$ より $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = \mathbf{0}$ となり，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ が導かれる。よって T は単射である。