線型代数 II 要綱 #1

2006–10–2　　河野

今回の講義から線型代数 II に入る。要綱の number 及びページ数は 1 から始めるが，章の数は前期からの継続とする。

4　連立 1 次方程式と階数

「連立 1 次方程式を解く」事に関しては前期に 1 章で扱った。そこでは基本変形と関連させ解を具体的にパラメータ表示することを考えた。ここでは連立 1 次方程式の一般理論を階数と関係させて扱う。この章の keyword は 3 つ，**連立１次方程式，基本変形，階数**である。階数は定義が 4 種類あり，1 つを定義に採用すれば残り 3 つは性質になる。階数が 4 つの側面を持っていることをしっかり押さえることが重要である。

4.1　連立 1 次方程式

最初に問題をもう一度定式化しよう。連立 1 次方程式を表現する形は色々あった。

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots && \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &=& b_m \end{array}\right.$$

$\boldsymbol{a}_j=(a_{ij})\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{b}=(b_i)\in\mathbb{R}^m$ とおくと

(E_V)　$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$

$A=(a_{ij})$ を (m,n) 行列, $\boldsymbol{x}=(x_j)\in\mathbb{R}^n$ とおくと

(E_M)　$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

この 3 つは同じ内容を表している。(E) は通常の表記，(E_V) はベクトル方程式として表記したもの，(E_M) は行列表示である。この時問題は以下の様に定式化される。

(1) (E) はどの様な場合に解を持つのか。

(2) 解が存在するとき，解はどれくらい有るのか。

(3) その時すべての解をパラメーター等を用いて表せ。

この連立 1 次方程式の解の集合を $W(A,\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$ と書いたが，上の問題は

(1) $W(A,\boldsymbol{b})\neq\emptyset$ となるのはどの様な場合か。

(2) $W(A,\boldsymbol{b})\neq\emptyset$ のとき $W(A,\boldsymbol{b})$ の「大きさ」はどれぐらいか。

(3) $W(A,\boldsymbol{b})$ の元すべてをパラメータを用いて表示せよ。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

という問題になる。ここでは (3) に関しては議論せず，(1) 及び (2) について考える。

4.2　基本変形

この節では線型代数 I で取り上げた「基本変形」と呼ばれる変形をもう一度考える。

基本変形とは次の様なものであった。(1) 行列のある行に他の行のスカラー倍を加える操作，(2) ある行をスカラー倍する操作 (ただし 0 倍を除く)，(3) ある行と別の行を交換する操作をまとめて**行基本変形**と言う。列に対しても同じ様な変形が考えられる。(1) 行列のある列に他の列のスカラー倍を加える操作，(2) ある列をスカラー倍する操作 (ただし 0 倍を除く)，(3) ある列と別の列を交換する操作をまとめて**列基本変形**と言う。両方合わせて**基本変形**と呼ぶ。

基本変形では次の命題が基本的である。

命題 4.1 任意の行列 A に対し適当な基本変形を繰返すと，$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形 (**標準形**ともいう) にできる (O の部分がない場合もある)。

行列が $\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できれば $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できる。$\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の形まで十分の場合もある。この形をここでは**準標準形**と呼んでおこう。準標準型に変形するためには，行基本変形と (3) のタイプの列基本変形で十分であることを注意しておく。

演習問題 4.1　命題 4.1 を証明せよ。また準標準型へは行基本変形と (3) のタイプの列基本変形で変形できることを示せ (線型代数 I 命題 2.10 を参考にせよ)。

演習問題 4.2　次の行列に基本変形を行なって標準形または準標準形にせよ (線型代数 I 演習問題 2.16 と同じ問題，このタイプの問題できる学生は省略してもよい)。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$　ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。

4.3　階数の幾つかの定義とその同値性

定義 4.2 4 種類の**階数** (rank) を定義しよう。$A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列とする。行列の j 列を縦ベクトルと見たものを $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ と書き，行列 A は縦ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を横に並べたものと考

え，$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ と書き表す事ができる。同様に行列の i 行を横ベクトルと見たものを $\boldsymbol{a}^*{}_i = (a_{i1}\, a_{i2}\, \cdots\, a_{in})$ と書き，行列 A は横ベクトル $\boldsymbol{a}^*{}_i$ を縦に並べたものと考え $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^* \end{pmatrix}$ と書き表す事ができる。

(1) 行列 A に基本変形を行ない標準型 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ になったとき，対角成分に並ぶ 1 の個数 r を $\mathrm{rank}_1(A)$ と表す。

(2) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ のなかの 1 次独立なベクトルの個数の最大値を $\mathrm{rank}_2(A)$ と表す。

(3) $\{\boldsymbol{a}^*{}_1, \cdots, \boldsymbol{a}^*{}_m\}$ のなかの 1 次独立なベクトルの個数の最大値を $\mathrm{rank}_3(A)$ と表す。

(4) $\mathrm{Im}(T_A) = \{\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$[(1)]の次元 $\dim \mathrm{Im}(T_A)$ を $\mathrm{rank}_4(A)$ と表す。

定理 4.3 定義 (1)，(2)，(3)，(4) は同じもの。
つまり，$\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ である。この定理が証明された後はこれらを同じ $\mathrm{rank}(A)$ で表し，行列 A の**階数** (*rank*) という。

$A_0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ に対し定理 4.3 が正しいのは明らかであろう。だが，一般の場合に定理 4.3 を証明するためには基本変形の性質を調べる事が必要になる。しかし，$\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ はその知識がなくても証明できるので，それを最初に補題として証明しておく。

補題 4.4 $\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ が成立する。

証明 $A, \boldsymbol{a}_j$ を定義 4.2 と同じものとし，$\boldsymbol{e}_j$ を基本ベクトルとする。$\boldsymbol{a}_j = A\boldsymbol{e}_j = T_A(\boldsymbol{e}_j)$ より，$\boldsymbol{a}_j \in \mathrm{Im}(T_A)$ となる。ここで，$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とする。$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立としても一般性を失わない。$k > r$ となる k に対し，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_k\}$ は 1 次独立ではない。よって $\boldsymbol{a}_k = \beta_{k1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_{kr}\boldsymbol{a}_r$ と表わすことができる。任意の $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(T_A)$ に対し，$\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r$ と書ける事を示せば，$\boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底となり，$\mathrm{rank}_4(A) = \dim \mathrm{Im}(T_A) = r = \mathrm{rank}_2(A)$ がいえる。$\boldsymbol{w}$ に対し $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在して，$\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{x}$ となる。$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と書けるので，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= A\boldsymbol{x} = A(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 A\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n A\boldsymbol{e}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + x_{r+1}\boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + + x_{r+1}(\beta_{r+11}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_{r+1r}\boldsymbol{a}_r) + \cdots + x_n(\beta_{n1}\boldsymbol{a}_1 \cdots + \beta_{nr}\boldsymbol{a}_r) \\
&= (x_1 + x_{r+1}\beta_{r+11} + \cdots + x_n\beta_{n1})\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (x_r + x_{r+1}\beta_{r+1r} + \cdots + x_n\beta_{nr})\boldsymbol{a}_r
\end{aligned}
$$

となり，よって補題は示された。∎

定理 4.3 を示すために次の補題を示す。この補題が示されれば，定理が成立することは明らかであろう。

補題 4.5 A に行基本変形または列基本変形を行った行列を A' とすると

[(1)]前期で定義したが，表現行列 A をもつ線形写像 T_A の像である。

$$\mathrm{rank}_2(A') = \mathrm{rank}_2(A)$$
$$\mathrm{rank}_3(A') = \mathrm{rank}_3(A)$$

が成立する。

略証　$A = (\boldsymbol{a}_1\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$，$A' = (\boldsymbol{a}'_1\ \ldots\ \boldsymbol{a}'_n)$ とおく。同様にできるので，$\mathrm{rank}_2(A') = \mathrm{rank}_2(A)$ のみ証明する。$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とすると，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立としても一般性を失わない。

最初に行基本変形の場合を示す。$A_r = (\boldsymbol{a}_1\ \ldots\ \boldsymbol{a}_r)$，$A'_r = (\boldsymbol{a}'_1\ \ldots\ \boldsymbol{a}'_r)$ とおくと A_r に行基本変形を行った結果が A'_r となる。$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立であることと $W(A_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ であることとは同値であることを注意しておく。今 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立なので $W(A_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ が成立している。行基本変形を行っても連立 1 次方程式の解集合は変化しないので，$W(A'_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ が成立している。よって $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_r$ は 1 次独立である。以上により $\mathrm{rank}_2(A) \leqq \mathrm{rank}_2(A')$ が成立する。行基本変形の逆操作は行基本変形であることに注意して，A と A' の役割を入れ換えれると $\mathrm{rank}_2(A') \leqq \mathrm{rank}_2(A)$ が成立することが分かる。よって $\mathrm{rank}_2(A') = \mathrm{rank}_2(A)$ が成立する。

次に列基本変形について示す。最初に列基本変形の 3 番目の変形の場合に示す。3 番目の変形は列の入れ換えなのでベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ は順序が一部異なるだけで集合としては等しい。よって 1 次独立なベクトルの最大個数は等しい。

2 番目の変形のとき，i 列が $\lambda\,(\neq 0)$ 倍されたとする。このとき $W(A_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ なので $W(A'_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ となり，1 次独立性は変わらない。

1 番目の変形のとき，変形を j 列の α 倍が i 列に加えるものとする。即ち $\boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}_i + \alpha\boldsymbol{a}_j$ であり，$k \neq i$ のとき $\boldsymbol{a}'_k = \boldsymbol{a}_k$ となっている。$i > r$ のとき最初の r 個のベクトルは変化しないので $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ も 1 次独立である。よって $i \leqq r$ とする。$j \leqq r$ のときは $W(A_r)$ と $W(A'_r)$ は一対一に対応するので，$W(A_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ より $W(A'_r) = \{\boldsymbol{0}\}$ となり，$\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ は 1 次独立になる。よって $j > r$ とする。ベクトルの組

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_j$$

が 1 次独立な場合とそうでない場合に分ける。1 次独立な場合は $\mathrm{rank}_2(A') \geqq r$ となるので $\mathrm{rank}_2(A) \leqq \mathrm{rank}_2(A')$ となる。1 次独立でない場合は $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_i, \ldots, \boldsymbol{a}'_r$ が 1 次独立であることを示す。$\boldsymbol{a}_j$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の線型結合で書けるので，$\boldsymbol{a}_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \beta_k \boldsymbol{a}_k$ と表しておく。ただし $\beta_i = 0$ である。

$$c_1\boldsymbol{a}'_1 + \cdots + c_i\boldsymbol{a}'_i + \cdots + c_r\boldsymbol{a}'_r = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。このとき式を変形すると

$$(c_1 + c_i\beta_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (c_{i-1} + c_i\beta_{i-1})\boldsymbol{a}_{i-1} + c_i\boldsymbol{a}_i + (c_{i+1} + c_i\beta_{i+1})\boldsymbol{a}_{i+1} + (c_r + c_i\beta_r)\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$$

となる。$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次独立性より $c_i = 0$ となり，$k \neq i$ に対しても $c_k = 0$ が成立する。よって $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_r$ は 1 次独立である。以上により $\mathrm{rank}_2(A) \leqq \mathrm{rank}_2(A')$ が成立する。A と A' の役割を入れ替えることにより $\mathrm{rank}_2(A') \leqq \mathrm{rank}_2(A)$ が得られるので証明は終わる。 ∎

演習問題 ***4.3**　補題 4.5 の証明を参考にして $\mathrm{rank}_3(A') = \mathrm{rank}_3(A)$ を示せ。

演習問題 4.4　補題 4.5 から定理 4.3 を示せ。

正方行列に関して階数と正則性の間には次の関係がある。

命題 4.6 A が n 次行列のとき，A が正則 (逆行列を持つ) である必要十分条件は $\mathrm{rank}(A)=n$ である。

証明　$A=(\boldsymbol{a}_1\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とする。A が正則のとき $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立である事を示せば，$\mathrm{rank}(A)=n$ が分かる。$x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$ が成立しているとする。この式は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ と書き直せるので，A^{-1} を両辺にかけると $A^{-1}A\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が分かる。

$\mathrm{rank}(A)=n$ とすると $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立である。このとき $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の基底である。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対しスカラー $x_1,\ldots,x_n$ が存在して $\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{x}_n$ と書ける。特に $\boldsymbol{b}$ として基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 達をとってくる。即ち各 i $(i=1,\ldots,n)$ に対しスカラー $b_{i1},\ldots,b_{in}$ が存在して $\boldsymbol{e}_i=b_{i1}\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_{in}\boldsymbol{a}_n$ が成立する。$B=(b_{ij})$ とおいて行列で書き直すと $E=BA$ を意味している。よって B は逆行列である。 ∎

演習問題 4.5　次の行列の階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$