線型代数 II 要綱 #3　　2006–10–30　　河野

5　行列式

この章では，n 行列 A に対して行列式 $\det(A)$ と呼ばれるスカラーを定義し，その性質について調べる。最初に 2 次，および 3 次行列に対し考え，次に一般の n 次行列に対しても定義しその性質を調べる。

5.1　2 次, 3 次行列の行列式

2 次の場合も 3 次の場合も行列式は「幾何的」側面と「代数的」側面を持つ。最初に 2 次行列の行列式の代数側面を見ておこう。

定義 5.1 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad-bc$ を A の**行列式** (*determinant*) といい $\det(A)$ と書く。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

と書くこともある。

これは天下りの定義なので，意味は定義から直接はよく分からない。そこで行列式のもつ代数的性質を見よう。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく。2 次行列に対しその行列式を $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ とも書く。すなわちベクトル 2 個の組から実数への写像と考える。

命題 5.2 2 次行列の行列式は次の性質を持つ。

(1) [**多重線型性**]　$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は各成分に関して線型である。ここで $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}'$ は任意に与えられたベクトル，α は任意に与えられた実数とする；

1) $\det(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})$

2) $\det(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

1') $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}') = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')$

2') $\det(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) = \alpha \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(2) [**交代性**]　$\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると $\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$

演習問題 5.1　命題 5.2 を証明せよ。

逆にこの 3 つの性質は行列式を特徴づける。すなわち次が成立する。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

命題 5.3 2 項数ベクトル 2 個の組に対し実数を対応させる写像 $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が (1), (2), (3) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ である。

演習問題 5.2 $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が (1), (2) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ である事を示せ。この事から (1), (2), (3) を満たせば，$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が分かる。**ヒント**：$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2$ のとき，$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = aD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b}) + cD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b})$ を示す。同様に $\boldsymbol{b}$ も $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2$ として $D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b})$ および $D(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b})$ を計算していく。

行列式については次が成立する。

定理 5.4 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

証明 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A) = ad - bc$, $\det(B) = ps - qr$ である。$AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ なので，$\det(AB) = (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) = apcq + apds + brcq + brds - (aqcp + aqdr + bscp + bsdr) = adps + bcrq - adqr - bcps = ad(ps - qr) - bc(ps - qr) = (ad - bc)(ps - qr) = \det(A)\det(B)$ となる。 ∎

この定理より次の逆行列の存在に関する定理が得られる (高校で扱っているかもしれない)。

定理 5.5 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ必要十分条件は $\det(A) \neq 0$ である。このとき A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。

証明 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおくと，$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A)E$ である。$\det(A) \neq 0$ のとき $B = \dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ とおくと，$AB = BA = E$ となり，B が A の逆行列であることが分かる。

A の逆用列 A^{-1} が存在するとき $AA^{-1} = E$ なので $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E) = 1$ となり，$\det(A) \neq 0$ が分かる。 ∎

次に 2 次行列の行列式の幾何的側面について考えよう。行列式 $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ の絶対値は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行 4 辺形の面積になっている。更にベクトル $\boldsymbol{a}$ から見て $\boldsymbol{b}$ が左にあるとき (ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は右手系をなしている，という) 正，右にあるとき (ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は左手系をなしている，という) 負になっていることが分かる。そこで正負もこめたこの値を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行 4 辺形の「有向面積」と考えることとする。即ち絶対値は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積を表し，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が右手系をなしているとき正，左手系をなしているとき負の値をとる。行列式はそのようなものと考えることができる。

3 次の行列に対し行列式を「代数的」に定義するのは後回しにして,「幾何的」に定義する。そのために 3 項ベクトルに対し外積を定義する。

定義 5.6 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**外積** (*outer product*) または**ベクトル積** (vector product) という。

命題 5.7 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と直交する。$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ の絶対値は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積である。また $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ が右手系をなす。

略証　内積 $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ はそれぞれ 0 になるので $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{y}$ が分かる。

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$ である。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積を S とすると，$S^2 = (|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\sin\theta)^2$ より，$S^2 = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ を得る。これを計算すると，$S^2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2$ で $|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|$ は平行 4 辺形の面積になる。

また $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$ より $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ が右手系をなす事が分かる。∎

命題 5.7 は外積の幾何的定義ともいえる。2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に共に直交し，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行 4 辺形の面積と同じ長さを持つものが $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積になる。

命題 5.8 外積は次の性質を持つ。

(1) [**多重線型性**]　$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は各成分に関して線型である。ここで $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ は任意に与えられたベクトル，α は任意に与えられた実数とする；

1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y}$

2) $(\alpha \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{y})$

1') $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}'$

2') $\boldsymbol{x} \times (\alpha \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$

(2) [**交代性**]　$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$

(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$

逆にこの 3 つの性質で外積は特徴付けられる。即ち 3 項数ベクトルの 2 個の組に対し，実数を対応させる写像が上の (1) 多重線型性，(2) 交代性，(3) 基本ベクトルに対する値，の 3 つの性質を持つとき，それは外積と一致する。

命題 5.9 $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が右手系のときは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が張る平行 6 面体の体積になる。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が左手系のときは，体積にマイナスをつけたものになる。

演習問題 *****5.3**　命題 5.8，5.9 及びを証明せよ。

定義 5.10 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とおくとき，A をベクトルを 3 つ並べたものと見て $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ と書く。このとき

$$\det(A) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

を A の**行列式** (*determinant*) と呼ぶ。

$\det(A)$ は 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が張る平行 6 面体の「有向体積」と考えることができる。即ち命題 5.9 から $\det(A)$ の絶対値は 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が張る平行 6 面体の体積であり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が右手系をなしているとき正，左手系をなしているとき負をの値をとる。

命題 5.11 $A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ に対し

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}$$

とおくと $\widetilde{A}A = \det(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成立する。

この命題は計算により出てくる。これを用いると次が得られる。

演習問題 5.4 命題 5.11 を証明せよ。

定理 5.12 行列 A に対し命題 5.11 で定義された $\widetilde{A}$ を考える。このとき $A\widetilde{A} = A\widetilde{A} = \det(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。特に $\det(A) \neq 0$ のとき逆行列が存在して $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ となる。

次に 3 次行列に対する行列式の代数的性質を考えよう。3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し，$\det(A) = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と定義したが，これを 3 個のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,$\boldsymbol{a}_3$ に対し実数を対応させる写像と見て $\det(A) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と書くと次の性質を持つ事が分かる。

命題 5.13

(1) [**多重線型性**] $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は各成分に関して線型であるここで $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}'_2\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}'_3$ は任意に与えられたベクトル，α は任意に与えられた実数とする；

1) $\det(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

2) $\det(\alpha\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

1') $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}_3)$

2') $\det(\boldsymbol{a}_1, \alpha\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

1") $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}'_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}'_3)$

2") $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \alpha\boldsymbol{a}_3) = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

(2) [**交代性**] $\det(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

(3) [**基本ベクトルに対する値**] $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$$

証明 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ 以外はそれ程難しくないので演習問題にまわす。$D = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{a}_1\times(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3), \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$ を考える。$\boldsymbol{a}_1\times(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$ は $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ と直交するので $D = 0$ となる。また多重線型性は証明されているとして，それを用いると $D = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3)$ となる。$i = 2, 3$ に対し $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_i$ は直交するので，$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = 0$ となる。以上から $0 = D = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2)$ となり，命題が示される。 ∎

演習問題 5.5 命題 5.13 を証明せよ。

命題 5.14 ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に対しスカラーを対応させる写像 $D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が上の (1), (2) を満たすとき

$$D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\}$$

となる。とくに行列式に対し

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

が成立する。

略証 $i = 1, 2, 3$ に対し $\boldsymbol{a}_i = a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + a_{2i}\boldsymbol{e}_2 + a_{3i}\boldsymbol{e}_3$ と書けるので，これを用いて $D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を変形していけば得られる。 ∎

次節で一般の n に対しては拡張を行うが，代数的な立場から，即ち命題 5.13 が成立する様に拡張を行う。