線型代数 II 要綱 #6

2006–12–11　　河野

6　固有値・固有ベクトルと対角化

この章では固有値・固有ベクトル・対角化について学ぶ。今までベクトル，行列の成分は実数のみを扱って来たがそれでは不十分であることが分かり，複素数まで拡張する必要がでてくる。

6.1　3 次行列の対角化

この節では 3 次行列の場合の対角化について議論することで対角化の意味・方法について学ぶ。n が一般の場合と一般論は次節で扱う。例から始めよう。$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと

$P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ なので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

対角成分以外が 0 であるような行列を**対角行列**と呼び，行列 A に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求め，実際に $P^{-1}AP$ を求める事を**対角化**という。

対角化には色々な応用がある。ここではべき乗の計算を取り上げる。A の n 乗を計算してみよう。$B = P^{-1}AP$ とおくと，$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^2P$ となる。以下同様にして $B^n = P^{-1}A^nP$ を得る。B は対角行列なので

$$B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。よって

$$A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

が分かる。

最初の例に戻って考えよう。この例では P は天下りに与えられた。このような P はどの様にすれば見つかるかを考えたい。そこで，逆にもしこの様な P が存在したとして状況を見てみよう。$P = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，$AP = P\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。このとき $(A\boldsymbol{a}\ A\boldsymbol{b}\ A\boldsymbol{c}) = A(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (4\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ より $A\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{a}$,$A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$,$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$ が得られる。すなわち $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ となる性質を持っている。また P は逆行列をもつので 1 次独立であることを注意しておく (命題 6.1)。

逆にこの様な $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ で 1 次独立なものが見つかれば，命題 6.1 より行列 $(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ は正則である。$P = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とおくとき，この変形を逆にたどりると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が分かる。

次の命題は以前扱ったがもう一度述べておく。

命題 6.1 3 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ が 1 次独立である事は $P = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ が逆行列を持つ事の必要十分条件である。

次の定義は 3 次行列についてであるが，n 次行列の場合もまったく同じであることを注意しておく。

定義 6.2 3 次行列 A に対し，スカラー λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる時，λ を A の**固有値** (*eigenvalue, proper value*) と言い，$\boldsymbol{x}$ を（λ に属する）A の**固有ベクトル** (*eigenvector, proper vector*) と言う。

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

を λ に属する A の**固有（ベクトル）空間** (*eigenspace,proper subspace*) と言う。

$\Phi_A(t) = \Phi(t; A) = \det(tE_n - A)$ を A の**固有多項式** (*eigenpolynomial, proper polynomial*) といい，方程式，$\Phi_A(t) = 0$ を A の**固有方程式** (*eigenequation, proper equation, characteristic equation*) という。また，この方程式の解を**特性解** (*characteristic root*) をいう。

命題 6.3 固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の 解 (特性解) が実数であれば A の固有値である。逆に固有値は固有方程式の実数解である。

この命題は次の補題からすぐ出てくる。

補題 6.4 あるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となる事の必要十分条件は $\det(B) = 0$ である。

証明　(1)($\Longrightarrow$) 対偶を示す。$\det(B) \neq 0$ のとき，系 5.27 より逆行列が存在するので $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の左から B^{-1} をかけると $\boldsymbol{x} = B^{-1}B\boldsymbol{x} = B^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$，よって O.K.
(2)($\Longleftarrow$)$B = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とおく。命題 6.1 より $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立ではない。よってすべては 0 ではない実数 x, y, z が存在して $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき，これを行列の形に直すと $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が得られる。∎

命題 6.3 は補題において $B = tE_n - A$ と考えるとでてくる。実数の場合特性解が実数なら固有値，そうでなければ固有値でない。

例 6.5 ここで行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の対角化を考える。この行列の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

なので特性解は $t = \pm i$ (虚数単位) となり実数ではない。よって実数の範囲では対角化できない。しかしベクトル及び行列の係数の範囲を広げて複素数としてみる。即ち

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C} \right\}, \quad M(2, \mathbb{C}) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

とおき，この範囲で対角化を考える。$A\boldsymbol{x} = i\boldsymbol{x}$ を解くと $-y = ix, x = iy$ となるので，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルとなっている。$A\boldsymbol{x} = -i\boldsymbol{x}$ を解くと $-y = -ix, x = -iy$ となるので，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る。$P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

と対角化できる。なお $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \notin \mathbb{R}^2$ であるが，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{C}^2$ であり，$P \notin M(2)$ であるが，$P \in M(2, \mathbb{C})$ となっていることを注意しておく。この拡張に関しては次節であつかう。

演習問題 6.1　次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。実数で求まらない場合は複素数に拡張して考えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & =2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$