

6.2 固有値・固有ベクトルと対角化

前節で考えた固有値・固有ベクトル等を一般の n 次行列に対し定義する。そして対角化に関する理論を見た後、実際に対角化する方法を整理しておく。

定義 6.6 (1) 線型写像に対する固有値・固有ベクトル⁽¹⁾ V をベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を線型写像とする。スカラー λ と 0 でないベクトル v が存在して $f(v) = \lambda v$ となる時, λ を f の固有値 (eigenvalue) と言い, v を (λ に属する) f の固有ベクトル (eigenvector) と言う。

$$W(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

を λ に属する f の固有 (ベクトル) 空間 (eigenspace) と言う。

(2) 行列に対する固有値・固有ベクトル n 次行列 A に対し, スカラー λ と 0 でないベクトル x が存在して, $Ax = \lambda x$ となる時, λ を A の固有値 (eigenvalue) と言い, x を (λ に属する) A の固有ベクトル (eigenvector) と言う。

$$W(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

を λ に属する A の固有 (ベクトル) 空間 (eigenspace) と言う。

(3) 固有方程式 n 次行列 A に対し, $\Phi_A(t) = \det(tE_n - A)$ を A の固有多項式 (eigenpolynomial) といい, 方程式, $\Phi_A(t) = 0$ を A の固有方程式 (eigenequation) という。また, この方程式の複素数における解を特性解 (characteristic root) という。

命題 6.7 固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の実数解は A の固有値である。逆に固有値は固有方程式の実数解である。

命題 6.7 は補題 6.8 において $B = tE_n - A$ とおけばでてくる。補題 6.8 の証明は補題 6.4 と同様にできる。

補題 6.8 $\det(B) = 0$ という事は, あるゼロでないベクトル x が存在して $Bx = 0$ となることの必要十分条件である。

演習問題 6.2 補題 6.8 及び命題 6.7 を証明せよ。

演習問題 6.3 次の行列の固有値固有ベクトルを求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

⁽¹⁾線型写像の固有値に関して講義では取り扱わないが, 重要な概念であるので定義のみ書いておく

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 6.9 n 次行列 A が対角化可能である必要十分条件は n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ が存在する事である。この時, $P = (\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_n)$ とおき, $A\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$ ($i = 1, \dots, n$) とすると,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \ddots & & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{は対角行列。}$$

この証明は前節で考えたことを n が一般の場合に行えばよいので演習問題とする。

演習問題 6.4 命題 6.9 を証明せよ。

この命題から, 対角化をするためには固有ベクトルの 1 次独立性をチェックする事が重要である事が分かるが, これに関しては次が基本的である。

定理 6.10 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ を行列 A の相異なる固有値, \mathbf{x}_i を λ_i に属する固有ベクトルとすると, それらは 1 次独立。

証明 s についての帰納法で示す。

- (1) $s = 1$ の時。 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ より $\{\mathbf{x}_1\}$ は 1 次独立である。
- (2) $s = k$ の時成立を仮定する。つまり

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$$

は 1 次独立とする。スカラー a_1, \dots, a_k, a_{k+1} に対し

$$a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{1}$$

が成立している時に $a_1 = \dots = a_{k+1} = 0$ を導けばよい。式 (1) に左から行列 A 書けた時 \mathbf{x}_i が固有ベクトルである事に着目すると

$$\lambda_1 a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k a_k \mathbf{x}_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{2}$$

が得られる。この時式 (1) を λ_{k+1} 倍して式 (2) から引くと

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1\mathbf{x}_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

が得られ 1 次独立性より

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1 = \dots = (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_k = 0$$

$\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$ ($i = 1, \dots, k$) より $a_1 = \dots = a_k = 0$ が得られ, 式 (1) に戻って考えれば $a_{k+1} = 0$ が得られる。■

系 6.11 n 次行列 A が相異なる n 個の固有値を持てば対角化可能。

系 6.12 固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解 (特性解) がすべて固有値である時, 各固有値 λ に対し $\dim W(\lambda) =$ (λ の重複度) が成り立てば, 対角化可能。

系 6.11 は説明の必要はないであろう。固有値に対して少なくとも 1 個は固有ベクトルが存在するという事実と定理 6.10 から従う。系 6.12 を示すためには「各固有値に対し 1 次独立なベクトルを選ぶと, このベクトルの組は 1 次独立である事」を定理 6.10 から示す必要がある。この事は少し分かりにくいかもしれないので, 特別な場合で説明する。

λ_1, λ_2 を行列 A の相異なる固有値とする。ベクトル v_1, v_2 を λ_1 に属する固有ベクトルで 1 次独立なもの, w_1, w_2 を λ_2 に属する A の固有ベクトルで 1 次独立なものとする。このとき v_1, v_2, w_1, w_2 が 1 次独立である事が定理 6.10 から次の様に分かる。

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 w_1 + a_4 w_2 = 0$ が成立しているとする。 $x = a_1 v_1 + a_2 v_2$ とおくと

$$\begin{aligned} Ax &= A(a_1 v_1 + a_2 v_2) \\ &= A(a_1 v_1) + A(a_2 v_2) \\ &= a_1 A v_1 + a_2 A v_2 \\ &= a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 \\ &= \lambda_1 (a_1 v_1 + a_2 v_2) \\ &= \lambda_1 x \end{aligned}$$

となる。すなわち $x \neq 0$ の場合は x は λ_1 に属する A の固有ベクトルである。また $w = a_3 w_1 + a_4 w_2$ とおくと

$$\begin{aligned} Aw &= A(a_3 w_1 + a_4 w_2) \\ &= a_3 A w_1 + a_4 A w_2 \\ &= a_3 \lambda_2 w_1 + a_4 \lambda_2 w_2 \\ &= \lambda_2 (a_3 w_1 + a_4 w_2) \\ &= \lambda_2 w \end{aligned}$$

となる。すなわち $w \neq 0$ の場合は w は λ_2 に属する A の固有ベクトルである。

今 $x \neq 0$ とすると, $x + w = 0$ より $w \neq 0$ となる。このとき x は λ_1 に属する A の固有ベクトルであり, w は λ_2 に属する A の固有ベクトルである。ところが $x + w = 0$ なので定理 6.10 に矛盾。よって $x = 0$ となる。このとき $w = 0$ も成立する。 x_1, x_2 は 1 次独立に選んでいたもので, $a_1 v_1 + a_2 v_2 = x = 0$ から $a_1 = a_2 = 0$ が得られる。 w_1, w_2 も 1 次独立に選んでいたもので $a_3 w_1 + a_4 w_2 = w = 0$ から $a_3 = a_4 = 0$ が得られる。よって x_1, x_2, w_1, w_2 の 1 次独立性が示される。以上の議論は一般の場合もできるので, 各固有値に対し 1 次独立な固有ベクトルを選べば, 全体のベクトルの組も 1 次独立になる事が分かる。

今まで述べたことに基づいて, ここで対角化の手順についてまとめておこう。ここでの話は一般の n 次行列に適用可能であるが, 簡単のため例をあげ説明する。例としてこの章で最初にあげた

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を取る。

(1) 固有方程式を求める。： 固有値を求めるために固有方程式を計算する。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = 0$ であった。今の場合

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$$

なので固有方程式は $t^3 - 6t^2 + 9t + 4 = 0$ である。

(2) 固有値を求める。： $t^3 - 6t^2 + 9t + 4 = (t-4)(t-1)^2 = 0$ なので解は $t = 4, 1$ である⁽²⁾。この例の場合解はすべて実数解なので特に問題はないが、複素数でもよいから対角化を考えたい場合は注意が必要である。

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を例にとる。 B の固有方程式は $\Phi_B(t) = (t-1)(t^2+1) = 0$

なので $t = 1$ という実数解を持つが、他に $t = \pm i$ という虚数解を持つ。この行列 B は実数の範囲では対角化不可能である。複素数でもよいから対角化したい場合はそれぞれの虚数解に対し複素ベクトルを求める。この場合それを実行すると実数の場合と同様に計算できて i に対応するベクトル

として $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $-i$ に対応するベクトルとして $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ が得られる。 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{pmatrix}$ とお

くと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(3) 1次独立な固有ベクトルを n 個求める。： 各固有値に対応する固有ベクトルを求める。固有値に対応する固有ベクトルが存在する事は理論的に保証されている。計算した結果、求めるベクトルがゼロベクトルしか存在しないという結論になった場合、固有値の計算または固有ベクトルの計算のどちらかが間違っている。逆にいうと固有ベクトルがきちんとでてきた場合固有値の計算が正しい事が保証される。

固有値が重解でない場合は固有ベクトルを1個決めればよいが、重解の場合はその重複度の分だけ1次独立な固有ベクトルを選ぶ必要がある。重複度分の1次独立な固有ベクトルが存在する場合もあるし、存在しない場合もある。存在しない場合は対角化不可能である。

A について固有ベクトルを求める。 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を4に対応する固有ベクトルとする。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

⁽²⁾今の場合行列式の計算と因数分解は別のステップとして行ったが、行列式計算の途中で因数分解が出て来るように変形した方が計算が簡単かもしれない。

より連立方程式

$$2x + y + z = 4x$$

$$x + 2y + z = 4y$$

$$x + y + 2z = 4z$$

が得られる。これを解いて (連立方程式の解法については既知とし, 途中計算は省略する),

$$x = y = z$$

を得る。固有ベクトルを 1 つ (自分で) 決めるため, $x = 1$ とおくと $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる。

次に 1 に対応する固有ベクトルを求める。 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 1 に対応する固有ベクトルとする。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

より連立方程式

$$2x + y + z = x$$

$$x + 2y + z = y$$

$$x + y + 2z = z$$

が得られる。これを解いて (連立方程式の解法については既知とし, 途中計算は省略する),

$$x + y + z = 0$$

を得る。1 は固有方程式の重解 (2 重解) なので, 1 次独立な 2 個のベクトルを選ぶ必要がある。いろ

いろな選び方があるが, ここでは章の最初でとりあげた例 $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

この例の場合 2 重解に対応する固有値に対し 2 つの 1 次独立な固有ベクトルが存在したが, 一般には正しくない。例えば $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し固有方程式は $\Phi_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 = 0$

なので固有値は 1 である。固有ベクトルを $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると $Ax = x$ より $x + y = x, y = y$ となり, $y = 0$ を得る。よってこの場合 1 次独立なベクトルは 1 つしか選ぶ事ができない。B は対角化することはできない。

(4) 対角化する行列を選び, 逆行列を計算し, 対角化を実行する。: (3) で求めた固有ベクトルを並べてできる行列が求める行列である。今の場合

$$P = (v_1 v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

がそれである。逆行列を求めると $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ となり,

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。

演習問題 6.5 次の行列が対角化可能かどうか調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

演習問題 6.6 演習問題 6.5 の行列で対角化不可能な行列に対し複素数の範囲で対角化を試みよ。それでも不可能な場合はその理由を調べ述べよ。