

6.3 計量ベクトル空間

この章の残りの節では内積の定義されたベクトル空間の線型写像を考える事により、対称行列が直交行列により対角化可能である事を示す。内積は複素数上のベクトル空間の場合も考えることができる。実際量子力学では複素数上の議論が必要になる。しかしこの講義では実数上のベクトル空間についてのみ取り上げる。興味のあるものは参考書等を参考に。

前期に学んだ計量ベクトル空間について復習をしておこう。最初に n 項数ベクトルに対し内積を定義した。

定義 6.13 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対しその内積 (inner product) を

$$(x, y) = x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

で定義した。またベクトル x の長さを

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

で定義した。

次の命題 (前期の命題 1.13) が成立した。

命題 6.14 (1) [正值性] 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し $(x, x) \geq 0$ となる。また $(x, x) = 0$ となるのは $x = 0$ の場合に限る。

(2) [対称性] 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し $(x, y) = (y, x)$ が成立する。

(3) [線型性]

1) 任意の $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対し $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ が成立する。

2) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ と任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し $(ax, y) = a(x, y)$ が成立する。

n 項数ベクトルの間には角度というものが定義されていなかった。そこで角度というものを定義するために次の定理 (前期定理 1.14) を証明した。

定理 6.15 [Schwarz(シュワルツ)の不等式] 任意のベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

が成立する。

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

$x, y \in \mathbb{R}^n$ とする。ただし, $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ としておく。このとき Schwarz の不等式より

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

が成立している。このとき $0 \leq \theta \leq \pi$ となる θ で

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

となるものが唯 1 つ存在する。このとき θ を x と y のなす角と定義した。

$x = 0$ または $y = 0$ のときは x と y のなす角は $\frac{\pi}{2}$ と定義する。この様に定義すると内積 0 ということは直交するための必要十分条件であることが分かった。

演習問題 6.7

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 4 項数ベクトル x を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 5 項数ベクトル x を求めよ。

定義 6.16 n 項数ベクトル空間 \mathbb{R}^n では、角度および長さを定義する事ができた。 \mathbb{R}^n に限らず実数上のベクトル空間には \mathbb{R}^n の制限として内積を考えることができる。この様に内積が定義されているベクトル空間を計量ベクトル空間と呼んだ。

x_1, \dots, x_k を計量ベクトル空間 V のベクトルとする。これらのベクトルの長さがすべて 1 であり、お互いに直行しているとき、これらのベクトルの組を正規直交系 (orthonormal system) といった。

ベクトル空間 V の基底 x_1, \dots, x_k が正規直交系であるとき、この基底を正規直交基底 (orthonormal basis) と呼んだ。

1 次独立なベクトルの組 v_1, \dots, v_n が与えられたとき、次のように正規直交系を構成することができる。これをシュミットの直交化法 (Schmidt's orthogonalization method) という。

最初に $x_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ とおく。 $y_2 = v_2 - (v_2, x_1)x_1$ とおき、 $x_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$ とおく。

$$y_3 = v_3 - (v_3, x_1)x_1 - (v_3, x_2)x_2$$

とおき、 $x_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$ とおく。一般の場合は

$$y_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k, x_i)x_i$$

とおき、 $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$ とおく。

定理 6.17 v_1, \dots, v_n が 1 次独立のとき, x_1, \dots, x_n は正規直交系である。

証明 $(x_1, x_1) = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, x_1 \right) = \frac{1}{\|v_1\|} \left(v_1, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right) = \frac{1}{\|v_1\|^2} (v_1, v_1) = \frac{\|v_1\|^2}{\|v_1\|^2} = 1$ となる。
よって x_1 の長さは 1 である。 $k > 1$ に関しても自分の長さで割り算をしているので, $k = 1$ のときと同様に $(x_k, x_k) = 1$ が示される。

$b = \alpha a$ と c に対し $(a, c) = 0$ ならば $(b, c) = (\alpha a, c) = \alpha(a, c) = 0$ となる。よって $(y_2, x_1) = 0$ ならば, $(x_2, x_1) = 0$ となる。

$$\begin{aligned} (y_2, x_1) &= (v_2 - (v_2, x_1)x_1, x_1) = (v_2, x_1) + (-(v_2, x_1)x_1, x_1) \\ &= (v_2, x_1) - (v_2, x_1)(x_1, x_1) \\ &= (v_2, x_1) - (v_2, x_1) \times 1 = (v_2, x_1) - (v_2, x_1) = 0 \end{aligned}$$

なので, $(x_2, x_1) = 0$ が示される。

$$\begin{aligned} (y_3, x_1) &= (v_3 - (v_3, x_1)x_1 - (v_3, x_2)x_2, x_1) = (v_3, x_1) + (-(v_3, x_1)x_1 - (v_3, x_2)x_2, x_1) \\ &= (v_3, x_1) - (v_3, x_1)(x_1, x_1) - (v_3, x_2)(x_2, x_1) \\ &= (v_3, x_1) - (v_3, x_1) \times 1 - (v_3, x_2) \times 0 = (v_3, x_1) - (v_3, x_1) = 0 \end{aligned}$$

なので $(x_3, x_1) = 0$ が示される。また

$$\begin{aligned} (y_3, x_2) &= (v_3 - (v_3, x_1)x_1 - (v_3, x_2)x_2, x_2) = (v_3, x_2) + (-(v_3, x_1)x_1 - (v_3, x_2)x_2, x_2) \\ &= (v_3, x_2) - (v_3, x_1)(x_1, x_2) - (v_3, x_2)(x_2, x_2) \\ &= (v_3, x_2) - (v_3, x_1) \times 0 - (v_3, x_2) \times 1 = (v_3, x_2) - (v_3, x_2) = 0 \end{aligned}$$

なので $(x_3, x_2) = 0$ が示される。

今 $1 \leq i < j \leq k$ となる i, j に関し $(x_i, x_j) = 0$ を仮定すると, $1 \leq j \leq k$ に対し $(y_{k+1}, x_j) = 0$ が成立することを示す。そうすれば帰納法によりすべての n での成立が示される。

$$\begin{aligned} (y_{k+1}, x_j) &= \left(v_{k+1} - \sum_{i=1}^k (v_{k+1}, x_i) x_i, x_j \right) = (v_{k+1}, x_j) - \sum_{i=1}^k (v_{k+1}, x_i) (x_i, x_j) \\ &= (v_{k+1}, x_j) - \sum_{i=1}^k (v_{k+1}, x_i) \delta_{ij} = (v_{k+1}, x_j) - (v_{k+1}, x_j) = 0 \end{aligned}$$

となるので証明が終わる。■

演習問題 6.8 定理 6.17 の証明で 1 次独立性を使っていないように見えるが, 実はそのことは使われている。どの部分に使われているか指摘せよ。

演習問題 6.9 次のベクトルの組からシュミットの直交化法を用いて正規直交系をつくれ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

正規直交基底の定義をしたので、対角化と基底の取り替えの関係について考える。最初に例を考える。 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。 $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し $P = (x_1, x_2)$ とおくと、 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ となり、

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これが対角化であった。これを座標変換の立場から考えてみよう。ベクトル x は $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と成分表示されるが、これは

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

と書いたときの係数 x_1, x_2 である。通常の成分表示は e_1, e_2 に関する成分表示と考えれば、 x_1, x_2 に関する成分表示を考えることができる。

x_1, x_2 も基底なので、任意の $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

と書くことができる。実際 $a_1 = x_1 - x_2$, $a_2 = 2x_2 - x_1$ がこの関係をみたす。このとき

$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

と書くことにする。行列 A を表現行列にもつ線型写像を T とする。この T を x_1, x_2 に関する座標で表現してみよう。 $y = T(x)$ とする。 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

なので $y_1 = 3x_1 - 2x_2$, $y_2 = x_1$ という関係がある。 $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ とすると、 $x_1 = 2a_1 + a_2$, $x_2 = a_1 + a_2$, $y_1 = 2b_1 + b_2$, $y_2 = b_1 + b_2$ が成立しているので、これから x_1, x_2, y_1, y_2 を消去すると $b_1 = 2a_1$, $b_2 = a_2$ となる。すなわち

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

となる。 A を線型写像 T の (基本ベクトルに関する) 表現行列とする。基底 x_1, x_2 対し $P = (x_1, x_2)$ とおき, $B = P^{-1}AP$ とおくと, x_1, x_2 に関する表現行列は B となる。このことは一般的にも成立する。

演習問題 6.10 次の行列 A で表現される線型写像を与えられた基底で表現した場合の行列を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

しかし x_1, x_2 は直交していないので内積とは相性が悪い。この成分表示に関する内積を計算してみよう。 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ に対して $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 = (2a_1 + a_2)(2b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = 5a_1b_1 + 3a_2b_1 + 3a_1b_2 + 2a_2b_2$ となるので

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) = 5a_1b_1 + 3a_2b_1 + 3a_1b_2 + 2a_2b_2$$

となる。しかし x_1, x_2 が正規直交基底の場合は (勿論例で考えた x_1, x_2 とは別のベクトルである) $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$ なので, $x = a_1x_1 + a_2x_2$, $y = b_1x_1 + b_2x_2$ に対し

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) &= (a_1x_1 + a_2x_2, b_1x_1 + b_2x_2) \\ &= a_1b_1(x_1, x_1) + a_1b_2(x_1, x_2) + a_2b_1(x_2, x_1) + a_2b_2(x_2, x_2) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

となり, 基本ベクトルに対する通常の内積の表示と一致している。

次の節では正規直交基底でこのようなものを選ぶかという問題について考える。