

6.4 計量ベクトル空間と対角化

この節では対称行列が直交行列で対角化可能であることを示す。以下では \mathbb{R}^n は計量ベクトル空間とする。定義をいくつかする。

定義 6.18 正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し A が

$$A = A^T$$

を満たすとき対称行列 (*symmetric matrix*) という。また

$$A^T A = E$$

を満たすとき直交行列 (*orthnormal matrix*) という。

A が対称行列のとき, 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(Ax, y) = (Ax)^T y = (x^T A^T) y = x^T (A^T y) = x^T (Ay) = (x, Ay)$$

となる。

A が直交行列のとき, 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(Ax, Ay) = (Ax)^T (Ay) = (x^T A^T) (Ay) = x^T (A^T A) y = x^T E y = x^T y = (x, y)$$

となる。

この結果の逆が成立する。

命題 6.19 n 次行列を A とする。任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

が成立するとき A は対称行列である。任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(Ax, Ay) = (x, y)$$

が成立するとき A は直交行列である。

この命題を証明するため補題を 1 つ用意する。

補題 6.20 A, A' を n 次行列とする。

- (1) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $(Ax, y) = (A'x, y)$ が成立するとき, $A = A'$ である。
- (2) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $(x, Ay) = (x, A'y)$ が成立するとき, $A = A'$ である。

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

証明 最初に X_1, X_2 が任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対し $(X_1, y) = (X_2, y)$ ならば $X_1 = X_2$ が成立する事を注意しておく。なぜなら, 任意の y に対し $(X_1 - X_2, y) = 0$ が成立しているが, 特に $y = X_1 - X_2$ とおくと $\|X_1 - X_2\|^2 = (X_1 - X_2, X_1 - X_2) = 0$ となるので $X_1 = X_2$ となる。

(1) を証明する。任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $(Ax, y) = (A'x, y)$ が成立しているとき, 前の注意より任意の x に対し $Ax = A'x$ が分かる。 $A = (a_1 \cdots a_n), A' = (a'_1 \cdots a'_n)$ と置く。 e_i ($i = 1, \dots, n$) に対し $Ae_i = a_i, A'e_i = a'_i$ となるので $a_i = a'_i$ となる。よって $A = A'$ となる。

(2) は演習に残す。 ■

演習問題 6.11 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $(x, Ay) = (x, A'y)$ が成立するとき, $A = A'$ が成立することを示せ。

A を 2 次行列とする。このとき 2 項数ベクトル a_1, a_2 を用いて $A = (a_1 \ a_2)$ と書ける。このとき

$$A \text{ は直交行列} \iff a_1, a_2 \text{ は正規直交系}$$

が成立している。なぜなら

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix} (a_1 \ a_2) \\ &= \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成立しているので, a_1, a_2 が正規直交系のときは $(a_1, a_1) = 1, (a_1, a_2) = 0, (a_2, a_2) = 1$ となるので, $A^T A = E$ となり A は直交行列になる。逆に A が直交行列のときは $A^T A = E$ なので $\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{pmatrix} = E$ より, $(a_1, a_1) = 1, (a_1, a_2) = 0, (a_2, a_2) = 1$ となり a_1, a_2 は正規直交系となる。このことは一般の n で成立する (演習問題 6.12)。

演習問題 6.12 n 次行列 A を $A = (a_1 \cdots a_n)$ と表すとき, A が直交行列である必要十分条件は a_1, \dots, a_n が正規直交系である事であることを示せ。

命題 6.21 対称行列 A に対しその特性解 λ は実数である。

証明 λ を $\Phi_A(t) = 0$ の解とする。 \mathbb{C}^n の世界で考えると固有ベクトル x が存在する。このとき $\overline{A}, \overline{x}$ を A, x の各成分をその共役複素数で置き換えた行列およびベクトルとする。 A の成分は実数なので $\overline{A^T} = A^T = A$ が成立する。

$$\overline{x^T}(Ax) = \overline{x^T} \lambda x = \lambda \overline{x^T} x$$

であり,

$$\overline{x^T}(Ax) = (\overline{x^T} A)x = (\overline{x^T} A^T)x = \overline{(x^T A^T)}x = \overline{(Ax)^T}x = \overline{\lambda x^T}x = \overline{\lambda} \overline{x^T}x$$

となる。よって

$$(\overline{\lambda} - \lambda) \overline{x^T}x = 0$$

が成立する。ここで $x = (x_i)$ とすると $\overline{x^T x} = \sum_{i=1}^n \overline{x_i x_i} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$ より $\lambda = \overline{\lambda}$ が分かる。

よって λ は実数である。 ■

命題 6.22 λ_1, λ_2 を対称行列 A の相異なる固有値とする。 $i = 1, 2$ に対し x_i を λ_i に属する固有ベクトルとすると、 x_1 と x_2 は直交する、即ち $(x_1, x_2) = 0$ となる。

証明 $(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2)$ であり、 $(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$ より $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$ となる。 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ より $(x_1, x_2) = 0$ となる。 ■

補題 6.23 (1) A を対称行列、 O を直交行列とすると、 $O^T A O$ は対称行列である。

(2) O, O' を直交行列とすると $O O'$ も直交行列である。

(3) $A = (a_1 \cdots a_n), B = (b_1 \cdots b_n)$ を n 次行列とする。 $A^T B$ の (i, j) 成分は (a_i, b_j) である。

演習問題 6.13 補題 6.23 を証明せよ。

対称行列が対角化可能であることを示そう。

定理 6.24 対称行列は直交行列により対角化可能である。即ち A を対称行列とすると、ある直交行列 O が存在して $O^T A O$ は対角行列になる。

証明 行列のサイズ n に関する帰納法で示す。 $n = 1$ のときすべての行列は対角行列なので定理は性質している。 k 次行列に対しては定理が成立していると仮定する。 A を $k+1$ 次の対称行列とする。固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解を λ とすると、命題 6.21 より λ は実数である。 λ に属する A の固有ベクトルを x_0 とする。必要なら $\frac{x_0}{\|x_0\|}$ を考える事により $\|x_0\| = 1$ としてよい。 \mathbb{R}^{k+1} のベクトル x_1, \dots, x_k で x_0, x_1, \dots, x_k が正規直交系になるものをとる。 $O_0 = (x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_k)$ と置くと、演習問題 6.12 より O_0 は直交行列になる。補題 6.23 より $B = O_0^T A O_0$ は対称行列であるが、再び補題 6.23 より

$$\begin{aligned} B &= O_0^T A O_0 = \begin{pmatrix} x_0^T \\ x_1^T \\ \vdots \\ x_k^T \end{pmatrix} \\ &= A(x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_k) \\ &= \begin{pmatrix} x_0^T \\ x_1^T \\ \vdots \\ x_k^T \end{pmatrix} (Ax_0 \ Ax_1 \ \cdots \ Ax_k) \\ &= \begin{pmatrix} x_0^T \\ x_1^T \\ \vdots \\ x_k^T \end{pmatrix} (\lambda x_0 \ Ax_1 \ \cdots \ Ax_k) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & \cdots & b_{1k+1} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{k+12} & \cdots & b_{k+1k+1} \end{pmatrix}$$

となる。\$B\$ は対称行列なので、

$$B = B^T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{k+12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1k+1} & b_{2k+1} & \cdots & b_{k+1k+1} \end{pmatrix}$$

となり、\$b_{12} = \cdots = b_{1k+1} = 0\$ となる。よって \$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{k+12} & \cdots & b_{k+1k+1} \end{pmatrix}\$ となってい

る。\$A_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k+12} & \cdots & b_{k+1k+1} \end{pmatrix}\$ と置くと、\$A_1\$ は \$k\$ 次の対称行列になっている。

帰納法の仮定より \$k\$ 次の直交行列 \$O_1\$ が存在して \$O_1^T A_1 O_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}\$ となっている。

\$O' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\$ と置くと \$O'\$ は \$k+1\$ 次の直交行列で、

$$\begin{aligned} O'^T B O' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O_1^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O_1^T A_1 O_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。\$O = O_0 O'\$ と置くと、\$O\$ は直交行列で、\$O^T A O\$ が対角行列になっているので定理は示された。■

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の場合を例にとり、実際に対称行列を直交行列により対角化しよう。計量を

考えないで行った対角化と重複する点が多い。ただし、対角化する行列が直交行列になるように選ぶ必要がある。A の固有方程式を計算すると

$$\Phi_A(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$$

となる。よって固有値は $t = 4, 1$ となる。4 に対応する固有ベクトルを求める。計量を考えにいれ

なければ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことができた。しかし、対角化する行列が直交行列になるためには、

固有ベクトルの長さが 1 である必要がある。よって

$$x_1 = \frac{1}{\|x\|} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。

次に 1 に対応する固有ベクトルを選ぶ。計量を考えにいれなければ

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる。しかし対角化する行列が直交行列になるためには、固有ベクトルが正規直交系になる必要がある。 v_1, v_2 からシュミットの直交化法で正規直交系をつくる。

$$x_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned} y_3 &= v_2 - (v_2, x_2)x_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$x_3 = \frac{1}{\|y_3\|} y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

を得る。 O は直交行列なので $O^{-1} = O^T$ であり,

$$O^T A O = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 6.14 次の対称行列を対角化する直交行列を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$