線型代数 II 問題解説 #1

河野

4　連立 1 次方程式と階数

演習問題 4.1　命題 4.1 を証明せよ。また準標準型へは行基本変形と (3) のタイプの列基本変形で変形できることを示せ (線型代数 I 命題 2.10 を参考にせよ)。

後半の「準標準型へは行基本変形と (3) のタイプの列基本変形で変形できることを示せ」は線型代数 I の命題 2.10 と同内容なので，それを参考にしてください。ここではそれは示されたとして，標準型に変形できることを示す。よって (m,n) 行列 A は準標準型をしているとしてよい。

いきなり一般形を考えると難しいかもしれないので，最初に $(3,3)$ 行列の場合に証明し，その後一般の (m,n) 行列について証明する。一般の場合に分かりにくいものは $(3,3)$ 行列の場合を参考にしながら考えて下さい。

A は準標準型なので $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ という形をしている場合を考える。このとき 1 列目の $-a_{13}$ 倍を 3 列目に加えると A は $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形できる。次に A_1 の 2 列目の $-a_{23}$ 倍を 3 列目に加えると $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形できる。この A_2 は標準型である。

ここから証明：(m,n) 行列 A は準標準型なので $A=\begin{pmatrix} E & * \\ O & O \end{pmatrix}$ という形をしている。ここで E は r 次の単位行列，$*$ は $(r,n-r)$ 行列，左下の O は $(m-r,r)$ の零行列，右下の O は (r,r) の零行列である。即ち $A=(a_{ij})$ とするとき，$A=(a_{ij})$ とするとき，$1 \leqq i,j \leqq r$ ならば $a_{ij}=\delta_{ij}$(クロネッカーのデルタ)，$i>r$ ならば $a_{ij}=0$ となっている。

$j=r+1,\ldots,n$ の各 j に対し次の操作を行う。最初 1 列目の $-a_{1j}$ 倍を j 列に加える。1 列目は $(1,1)$ 成分のみ 1 であり，他の成分は 0 になっている。よってこの操作で j は $(1,j)$ 成分以外は変化しない。$(1,j)$ 成分は最初は a_{1j} なのが $a_{1j}+(-a_{1j})\times 1$ となるので，0 になる。次に 2 列目の $-a_{2j}$ 倍を j 列に加える。2 列目は $(2,2)$ 成分のみ 1 であり，他の成分は 0 になっている。よってこの操作で j は $(2,j)$ 成分以外は変化しない。$(2,j)$ 成分は最初は a_{2j} なのが $a_{2j}+(-a_{2j})\times 1$ となるので，0 になる。以下 $i=r$ までこの操作 (即ち i 列の $-a_{ij}$ 倍を j 列に加える操作) を続ける。

$j=n$ までこの操作を行うと行列の (i,j) 成分は $j>r$ のとき $a_{ij}=0$ になっている。即ち行列は $\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$ となり標準型になっている。

演習問題 4.2　次の行列に基本変形を行なって標準形または準標準準形にせよ (線型代数 I 演習問題 2.16 と同じ問題，このタイプの問題できる学生は省略してもよい)。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$　ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。

解答は省略。準標準準型に直すのはすでにやっているので，それを参考にして下さい。その後標準型に直すのは前の演習問題を参考にやって下さい。

演習問題 ***4.3**　補題 4.5 の証明を参考にして $\mathrm{rank}_3(A') = \mathrm{rank}_3(A)$ を示せ。

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^* \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1'^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n'^* \end{pmatrix}$ とおく。$\mathrm{rank}_3(A) = r$ とすると，$\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*$ が 1 次独立としても一般性を失わない。

最初に列基本変形の場合を示す。$A_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^* \end{pmatrix}$, $A_r' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1'^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_r'^* \end{pmatrix}$ とおくと A_r に列基本変形を行った結果が A_r' となる。$W^*(A_r) = \{\, \boldsymbol{x}^* \mid \boldsymbol{x}^* A_r = \boldsymbol{0} \,\}$ とする。$\boldsymbol{a}$^$*_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*$ が 1 次独立であることと $W^*(A_r) = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$ であることは同値であることを注意しておく。今 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立なので $W^*(A_r) = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$ が成立している。$\boldsymbol{x}^* A_r = \boldsymbol{0}$ の転置行列をとると $A_t^T \boldsymbol{x}^{*T} = \boldsymbol{0}^T$ となる。このことより $W^*(A_r) = W^*(A_r')$ が従う。よって $W(A_r') = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$ が成立し，$\boldsymbol{a}_1', \ldots, \boldsymbol{a}_r'$ が 1 次独立であることが分かる。以上により $\mathrm{rank}_3(A) \leqq \mathrm{rank}_3(A')$ が成立する。列基本変形の逆操作は列基本変形であることに注意して，A と A' の役割を入れ換えれると $\mathrm{rank}_3(A') \leqq \mathrm{rank}_3(A)$ が成立することが分かる。よって $\mathrm{rank}_3(A') = \mathrm{rank}_3(A)$ が成立する。

次に行基本変形について示す。最初に行基本変形の 3 番目の変形の場合に示す。3 番目の変形は行の入れ換えなのでベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_n^*$ と $\boldsymbol{a}_1'^*, \ldots, \boldsymbol{a}_n'^*$ は順序が一部異なるだけで集合としては等しい。よって 1 次独立なベクトルの最大個数は等しい。

2 番目の変形のとき，i 行が $\lambda\,(\neq 0)$ 倍されたとする。このとき $W^*(A_r) = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$ なので $W^*(A_r') = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$ となり，1 次独立性は変わらない。

1 番目の変形のとき，変形を j 行の α 倍が i 行に加えるものとする。即ち $\boldsymbol{a}_i'^* = \boldsymbol{a}_i^* + \alpha \boldsymbol{a}_j^*$ であり，$k \neq i$ のとき $\boldsymbol{a}_k'^* = \boldsymbol{a}_k^*$ となっている。$i > r$ のとき最初の r 個のベクトルは変化しないので $\boldsymbol{a}_1'^*, \ldots, \boldsymbol{a}_n'^*$ も 1 次独立である。よって $i \leqq r$ とする。$j \leqq r$ のときは $W^*(A_r)$ と $W^*(A_r')$ は一対一に対応するので，$W^*(A_r) = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$ より $W^*(A_r') = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$ となり，$\boldsymbol{a}_1'^*, \ldots, \boldsymbol{a}_n'^*$ は 1 次独立になる。よって $j > r$ とする。ベクトルの組

$$\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}^*, \boldsymbol{a}_{i+1}^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*, \boldsymbol{a}_j^*$$

が 1 次独立な場合とそうでない場合に分ける。1 次独立な場合は $\mathrm{rank}_3(A') \geqq r$ となるので $\mathrm{rank}_3(A) \leqq \mathrm{rank}_3(A')$ となる。1 次独立でない場合は $\boldsymbol{a}_1'^*, \ldots, \boldsymbol{a}_i'^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r'^*$ が 1 次独立であることを示す。$\boldsymbol{a}_j^*$ は $\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}^*, \boldsymbol{a}_{i+1}^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*$ の線型結合で書けるので，$\boldsymbol{a}_j^* = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \beta_k^* \boldsymbol{a}_k^*$ と表しておく。ただし $\beta_i = 0$ である。

$$c_1 \boldsymbol{a}_1'^* + \cdots + c_i \boldsymbol{a}_i'^* + \cdots + c_r \boldsymbol{a}_r'^* = \boldsymbol{0}$$

が成立しているとする。このとき式を変形すると

$$(c_1 + c_i\beta_1)\boldsymbol{a}_1^* + \cdots + (c_{i-1} + c_i\beta_{i-1})\boldsymbol{a}_{i-1}^* + c_i\boldsymbol{a}_i^* + (c_{i+1} + c_i\beta_{i+1})\boldsymbol{a}_{i+1}^* + (c_r + c_i\beta_r)\boldsymbol{a}_r^* = \boldsymbol{0}$$

となる。$\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r^*$ の 1 次独立性より $c_i = 0$ となり，$k \neq i$ に対しても $c_k = 0$ が成立する。よって $\boldsymbol{a}_1'^*, \ldots, \boldsymbol{a}_r'^*$ は 1 次独立である。以上により $\mathrm{rank}_3(A) \leqq \mathrm{rank}_3(A')$ が成立する。A と A' の役割を入れ替えることにより $\mathrm{rank}_3(A') \leqq \mathrm{rank}_3(A)$ が得られるので証明は終わる。

演習問題 4.4　補題 4.5 から定理 4.3 を示せ。

補題 4.4 により $\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ は示されているので，$\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A)$ を示す。

行列 A に対し基本変形を実行して標準型 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ に変形することができる。基本変形の逆操作も基本変形なので，$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ に基本変形を何回か行って行列 A にできる。このことを言い直すと次の性質を満たす行列の列

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$$

が存在することを意味する。

(1) $A_0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$,

(2) $A_k = A$,

(3) 各 i $(i = 1, \ldots, k)$ に対し A_i は A_{i-1} に基本変形をほどこして得られる。

k に関する帰納法で $\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A)$ を示す。

(1)　$k = 0$ のとき (帰納法の出発点は $k = 0$ である)：$A = A_0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ である。$\mathrm{rank}_1(A) = r$ であり，$\mathrm{rank}_2(A) = r$，$\mathrm{rank}_3(A) = r$ なので $\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A)$ が成立している。

(2)　$k = s$ のとき定理が成立していると仮定する。$A_0, A_1 \ldots, A_{s+1}$ が存在して (1) $A_0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, (2) $A_{s+1} = A$，(3) 各 i $(i = 1, \ldots, s+1)$ に対し A_i は A_{i-1} に基本変形をほどこしたものである，の 3 つを満たしているとする。このとき $\mathrm{rank}_1(A) = r$ である。

補題 4.5 より $\mathrm{rank}_2(A_s) = \mathrm{rank}_2(A_{s+1})$，$\mathrm{rank}_3(A_s) = \mathrm{rank}_3(A_{s+1})$ が成立している。$A = A_{s+1}$ なので $\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_2(A_{s+1}) = \mathrm{rank}_2(A_s)$，$\mathrm{rank}_3(A) = \mathrm{rank}_3(A_{s+1}) = \mathrm{rank}_3(A_s)$ が成立す

る。ここで帰納法の仮定より $\mathrm{rank}_1(A_s)=\mathrm{rank}_2(A_s)=\mathrm{rank}_3(A_s)$ が成立していることに注意する。以上により $\mathrm{rank}_1(A)=\mathrm{rank}_2(A)=\mathrm{rank}_3(A)$ が成立する。

演習問題 4.5 次の行列の階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$

行列を基本変形で標準型ないしは準標準型に変形すれば，階数の定義 (1) より階数は求まる。基本変形はすでにできるようになっていることを仮定するので (4) を除いて結果のみ書いておく。(1) 2，(2) 4，(3) 2。

(4) あたえられた行列を A とする。行列に基本変形を実行すると $A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ が得られる (途中計算省略)。ここで場合分けをする。

(a) $a=2$ かつ $b=1$ の場合：このとき行列はすでに準標準型になっている。よって $\mathrm{rank}(A)=2$

(b) $a\neq 2$ の場合：$a-2\neq 0$ なので 3 行目に $\dfrac{1}{a-2}$ をかけると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ が得られる。この行列の 3 行目の $1-b$ 倍を 4 行目に加えると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られ，列の交換により $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (行列は準標準型ではないが，3 行目の 2 倍を 2 行目に加えれば準標準型になるので，ここで変形をやめてもよいであろう。一般に単位行列の部分の対角成分より上の部分 (今の例では $(1,2),(1,3),(2,3)$ 成分) が 0 でなくても階数の計算には十分である) となる。よって $\mathrm{rank}(A)=3$ である。

(c) $b\neq 1$ の場合：$b-1\neq 0$ なので 4 行目に $\dfrac{1}{b-1}$ をかけると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が得られる。この行列の 3 行目と 4 行目を入れ替え，更に 3 行目の $2-a$ 倍を 4 行目に加えると

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られ，列の交換により $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。よって $\mathrm{rank}(A) = 3$ である。

以上をまとめると $a = 2$ かつ $b = 1$ のとき $\mathrm{rank}(A) = 2$ であり，それ以外の場合は $\mathrm{rank}(A) = 3$ である。