

演習問題 *4.6 A を (s_1, t_1) 行列, B を (s_1, t_2) 行列, C を (s_2, t_1) 行列, D を (s_2, t_2) 行列とする。 x_1 を t_1 項数ベクトル, x_2 を t_2 項数ベクトルとする。 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と

するとき $Mx = \begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix}$ が成立することを示せ。

$M = (m_{ij})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $D = (d_{ij})$ とおく。また $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t_1+t_2} \end{pmatrix}$, $x_1 =$

$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1t_1} \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2t_2} \end{pmatrix}$ とおく。行列 M を t_1 列と $t_1 + 1$ 列の間および s_1 行と $s_1 + 1$ 行の間で分割してできる行列が A, B, C, D なので

$$\begin{aligned} a_{ij} &= m_{ij} & (1 \leq i \leq s_1, 1 \leq j \leq t_1) \\ b_{ij} &= m_{i, t_1+j} & (1 \leq i \leq s_1, 1 \leq j \leq t_2) \\ c_{ij} &= m_{s_1+i, j} & (1 \leq i \leq s_2, 1 \leq j \leq t_1) \\ d_{ij} &= m_{s_1+i, t_1+j} & (1 \leq i \leq s_2, 1 \leq j \leq t_2) \end{aligned}$$

が成立する。またベクトルに対しても

$$\begin{aligned} x_{1j} &= x_j & (1 \leq j \leq t_1) \\ x_{2j} &= x_{t_1+j} & (1 \leq j \leq t_2) \end{aligned}$$

が成立する。 $Ax_1 + Bx_2$ の i 成分は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{t_1} a_{ik}x_{1k} + \sum_{k=1}^{t_2} b_{ik}x_{2k} &= \sum_{k=1}^{t_1} m_{ik}x_k + \sum_{k=1}^{t_2} m_{i, t_1+k}x_{t_1+k} \\ &= \sum_{k=1}^{t_1} m_{ik}x_k + \sum_{k=t_1+1}^{t_1+t_2} m_{ik}x_k \\ &= \sum_{k=1}^{t_1+t_2} m_{ik}x_k \end{aligned}$$

となる。これは Mx の i 成分と等しい。また $Cx_1 + Dx_2$ の i 成分は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{t_1} c_{ik}x_{1k} + \sum_{k=1}^{t_2} d_{ik}x_{2k} &= \sum_{k=1}^{t_1} m_{s_1+i, k}x_k + \sum_{k=1}^{t_2} m_{s_1+i, t_1+k}x_{t_1+k} \\ &= \sum_{k=1}^{t_1} m_{s_1+i, k}x_k + \sum_{k=t_1+1}^{t_1+t_2} m_{s_1+i, k}x_k \\ &= \sum_{k=1}^{t_1+t_2} m_{s_1+i, k}x_k \end{aligned}$$

となる。これは Mx の $s_1 + i$ 成分と等しい。よって $Mx = \begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix}$ が成立する。

演習問題 4.7 次の連立方程式が解を持つかどうか、定理 4.7 を用いて調べよ。解を持つときは解をパラメータ表示せよ。また $W(A)$ の基底を 1 組求めよ。

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + y + z + w = a \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} x + y + z + u + v = 1 \\ x + 2y + 3z + 4v = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5v = a \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} 2x + y + 2z + u + 2v + w = 1 \\ x + 2y + z + 2u + v + 2w = 0 \\ x - y + z - u + v - w = a \\ x + y + z + u + v + w = b \end{cases} \\ (4) & \begin{cases} 1x + 1y + 1z + 1u + 1v + 2w = 1 \\ 1x + 2y + 2z + 2u + 3v + 3w = 2 \\ 1x + 1y + 2z + 3u + 2v + 3w = 2 \\ 2x + 2y + 3z + 4u + 3v + 5w = a + 3 \\ 3x + 2y + 3z + 4u + 3v + 5w = b + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

この問題は前期でもやっているなので基本変形について結果のみ書く。基本変形が分からない学生は前期の問題解説を参考にしてください。各問題を通じて連立 1 次方程式の係数行列を A 、定数部分のベクトルを b 、係数拡大行列を $\tilde{A} = (Ab)$ 、解ベクトルを x とする。

(1) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ を基本変形すると $\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ となる。よって $\text{rank}(A) = 1$ となる。 $\text{rank}(\tilde{A})$ は $a \neq 1$ のとき 2, $a = 1$ のとき 1 になる。よって解をもつ必要十分条件は $a = 1$ である。 $a = 1$ のとき解ベクトルは

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - y - z - w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。このとき $W(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ の基底として

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる。基底であることの証明は省略する。各自試みよ。

$$(2) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 5 & a \end{pmatrix} \text{を基本変形すると } \tilde{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \text{と}$$

なる。よって $\text{rank}(A) = 2$ となる。 $\text{rank}(\tilde{A})$ は $a \neq 1$ のとき 3, $a = 1$ のとき 2 になる。よって解をもつ必要十分条件は $a = 1$ である。 $a = 1$ のとき解ベクトルは

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z-2u+2v \\ -2z+u-3v \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。このとき $W(A) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$ の基底として

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる。基底であることの証明は省略する。各自試みよ。

$$(3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \text{を基本変形すると } \tilde{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{b-a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2-a-3b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a-3b}{2} \end{pmatrix}$$

となる。よって $\text{rank}(A) = 2$ となる。 $\text{rank}(\tilde{A})$ は $\frac{2-a-3b}{2}, \frac{a-3b}{2}$ がともに 0 のとき 2, どちらかが 0 でないとき (共に 0 の場合を含む) は 3 になる。よって解をもつ必要十分条件は $\frac{2-a-3b}{2} = 0$ かつ $\frac{a-3b}{2} = 0$ である。これを解いて $a = 1, b = \frac{1}{3}$ をえる。このとき解ベクトルは

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - z - v \\ -\frac{1}{3} - u - w \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。このとき $W(A) = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid Ax = 0\}$ の基底として

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる。基底であることの証明は省略する。各自試みよ。

$$(4) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 5 & a+3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 3 & 5 & b+3 \end{pmatrix} \text{を基本変形すると } \tilde{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

となる。列基本変形を行うと変数の変化を注意して見る必要があるので、ここでは行基本変形しか行っていない。この形でも階数は分かるだろう。よって $\text{rank}(A) = 4$ となる。 $\text{rank}(\tilde{A})$ は $a = 0$ のとき 4, $a \neq 0$ のときは 5 になる。よって解をもつ必要十分条件は $a = 0$ である。このとき解ベクトルは

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b-u-w \\ 1-b-2u-2w \\ u \\ b+w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 1-b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。このとき $W(A) = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid Ax = 0\}$ の基底として

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる。基底であることの証明は省略する。各自試みよ。

演習問題 4.8 次の行列 A および $\tilde{A} = (Ab)$ の階数を求めよ。ただし

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

とする。また $Ax = b$ が解をもつかどうか調べよ。解を持つとき、その解をパラメータ表示せよ。
(この問題ができれば方程式論は卒業)

この問題は場合分けがかなり²面倒です。落ち着いて考える必要があります。星印をつければよかつたかなと考えています。基本変形を実行して行き変数等で割り算が必要になったときに、それが0かそうでないかで場合分けします。最初の部分のみ変形の概略を示し、後は結果のみ書きます。 $\tilde{A} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & q \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & r \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & c & s \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \text{に基本変形を実行して } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & c-1 & s-p \\ 0 & 0 & -c & -c & -c & -c(c-1) & t-c(s-p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

を得る。ここで3行目を $-c$ で割って係数を1にしたいが、それが可能なためには $c \neq 0$ が必要である。ここで $c=0$ と $c \neq 0$ に場合分けする必要が生じる。この様に必要が生じたら場合分けを実行するが、考える変数が2つ以上になるので複雑になります。以下結果のみ書きます。変数の指定を忘れました。ここでは X, Y, Z, U, V, W としておきます。(小文字にしようと思ったがすでに u を使用していたので)

(1) $c=0$ かつ $b=0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & s-r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p-r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p+(1-a)(p-r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $t=0, u=0, q-p+(1-a)(p-r)=0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s-r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p-r \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(2) $c=0$ かつ $b=1$ かつ $a=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & s-p-\frac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r-p \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $t = 0, r - p = 0, q - p = 0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ s - r - \frac{b}{u} \\ 0 \\ \frac{u}{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + W \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(3) $c = 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $b \neq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p - \frac{r-p}{b-1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & s - p - \frac{u}{b} + \frac{r-p}{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{b}{u} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{r-p}{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q - p + \frac{(1-a)(r-p)}{b-1} \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $t = 0, q - p + \frac{(1-a)(r-p)}{b-1} = 0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - \frac{r-p}{b-1} \\ s - p - \frac{u}{b} + \frac{r-p}{b-1} \\ 0 \\ \frac{u}{b} \\ 0 \\ \frac{r-p}{b-1} \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(4) $c = 0$ かつ $b = 1$ かつ $a \neq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p - \frac{q-p}{a-1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & s - p - \frac{u}{b} + \frac{q-p}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{b}{u} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q-p}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r - p + \frac{(1-b)(q-p)}{a-1} \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $t = 0, r - p + \frac{(1-b)(q-p)}{a-1} = 0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - \frac{q-p}{a-1} \\ s - p - \frac{b}{u} + \frac{q-p}{a-1} \\ 0 \\ \frac{u}{b} \\ 0 \\ \frac{q-p}{a-1} \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(5) $c \neq 0$ かつ $b = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & c(r-p) + s - r - \frac{t}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p - r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a-1)(r-p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $u = 0, (a-1)(r-p) = 0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \frac{t}{c} \\ c(r-p) + s - r - \frac{t}{c} \\ 0 \\ 0 \\ p - r \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(6) $c \neq 0$ かつ $b = 1$ かつ $a = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & c-1 & -\frac{t - c(s-p)}{c} - \frac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r - p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q - p \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $r - p = 0, q - p = 0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{t}{c} \\ -\frac{t - c(s - p)}{c} - \frac{u}{b} \\ \frac{u}{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + W \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 - c \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(7) $c \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $b \neq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p - \frac{r - p}{b - 1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{t - c(s - p)}{c} + \frac{(1 - c)(r - p)}{b - 1} - \frac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{r - p}{b - 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q - p + \frac{(1 - a)(r - p)}{b - 1} \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $q - p + \frac{(1 - a)(r - p)}{b - 1} = 0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - \frac{r - p}{b - 1} \\ \frac{t}{c} \\ -\frac{t - c(s - p)}{c} + \frac{(1 - c)(r - p)}{b - 1} - \frac{u}{b} \\ \frac{u}{b} \\ 0 \\ \frac{r - p}{b - 1} \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(8) $c \neq 0$ かつ $b = 1$ かつ $a \neq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p - \frac{q - p}{a - 1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t}{c} + (1 - c)(r - p) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{t}{c} - \frac{u}{b} + p - s + (1 - c)(r - p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{u}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r - p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{q - p}{a - 1} \end{pmatrix}$$

解を持つ必要十分条件は $t = 0, r - p + \frac{(1-b)(q-p)}{a-1} = 0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - \frac{q-p}{a-1} \\ \frac{t}{c} + (1-c)(r-p) \\ -\frac{t}{c} - \frac{u}{b} + p - s + (1-c)(r-p) \\ \frac{u}{b} \\ 0 \\ \frac{q-p}{a-1} \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 4.9 命題 4.12 および命題 4.13 を証明せよ。

この議論は \sum を用いて計算しているのでなれていないと難しいかもしれない。 $n = 3, 4$ の場合を計算してみると、議論の参考になるかもしれない。ここでは最初に $n = 3$ の場合の例を見る。

$P_3(1, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $P_3(1, 3)P_3(1, 3) = E$ (単位行列) なので $P_3(1, 3)^{-1} = P_3(1, 3)$ と

なる。 $Q_3(2, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_3\left(2, \frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し $Q_3(2, 5)Q_3\left(2, \frac{1}{5}\right) = E$

なので $Q_3(2, 5)^{-1} = Q_3\left(2, \frac{1}{5}\right)$ である。 $R_3(1, 3, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_3(1, 3, -4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

に対し $R_3(1, 3, 4)R_3(1, 3, -4) = E$ なので $R_3(1, 3, 4)^{-1} = R_3(1, 3, -4)$ である。

次からが一般的な証明である。最初は命題 4.12 で逆行列を計算する。 $P_n(k, \ell)P_n(k, \ell)$ を計算する。この積の行列 (i, j) 成分を \tilde{p}_{ij} とすると

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ij} &= \sum_{s=1}^n p_{is}p_{sj} \\ &= \sum_{s \neq k, \ell} p_{is}p_{sj} + p_{ik}p_{kj} + p_{i\ell}p_{\ell j} \end{aligned}$$

である。ただし $\sum_{s \neq k, \ell}$ は $s = 1$ から $s = n$ まで和をとるとき $s = k$ と $s = \ell$ を除いて和をとるこ

とを意味する。最初に $i = k$ の場合を計算する。このとき和は $\sum_{s \neq k, \ell} p_{ks}p_{sj} + p_{kk}p_{kj} + p_{k\ell}p_{\ell j} =$

$\sum_{s \neq k, \ell} p_{ks}p_{sj} + 0 \times p_{kj} + 1 \times p_{\ell j} = \sum_{s \neq k, \ell} p_{ks}p_{sj} + p_{\ell j}$ となる。 p_{ks} は $s \neq \ell$ のとき 0 なので $\tilde{p}_{ij} = p_{\ell j}$

となる。よって $j = k$ のときのみ $\tilde{p}_{ij} = 1$ でそれ以外は 0 である。次に $i = \ell$ の場合、この場合は

$i = k$ の場合と同様にできる。和は $\sum_{s \neq k, \ell} p_{\ell s}p_{sj} + p_{\ell k}p_{kj} + p_{\ell\ell}p_{\ell j} = \sum_{s \neq k, \ell} p_{\ell s}p_{sj} + 1 \times p_{kj} + 0 \times p_{\ell j} =$

$\sum_{s \neq k, \ell} p_{ks} p_{sj} + p_{kj}$ となる。 p_{ks} は $s \neq k$ のとき 0 なので $\tilde{p}_{ij} = p_{kj}$ となる。 よって $j = \ell$ のときのみ $\tilde{p}_{ij} = 1$ でそれ以外は 0 である。 最後に $i \neq k$ かつ $i \neq \ell$ の場合を考える。 このときは $p_{ik} = 0$ かつ $p_{i\ell} = 0$ なので $\tilde{p}_{ij} = \sum_{s \neq k, \ell} p_{is} p_{sj}$ となる。 p_{is} は $s = i$ のときのみ 1 でそれ以外は 0 となる。 よって $\tilde{p}_{ij} = p_{ii} p_{ij} = p_{ij}$ である。 このときも $i = j$ のとき 1 それ以外は 0 である。 いずれの場合も $i \neq j$ のとき $\tilde{p}_{ij} = 0$, $i = j$ のとき $\tilde{p}_{ij} = 1$ となる。 よって $\tilde{p}_{ij} = \delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ) なので $P_n(k, \ell) P_n(k, \ell) = E_n$ となる。 よって $P_n(k, \ell)^{-1} = P_n(k, \ell)$ である。

$Q_n(k; \lambda) Q_n\left(k; \frac{1}{\lambda}\right)$ を計算する。 この積の行列の (i, j) 成分を \tilde{q}_{ij} とする。 $Q_n(k; \lambda)$ の (i, j) 成分はプリント通り q_{ij} , $Q_n\left(k; \frac{1}{\lambda}\right)$ の (i, j) 成分を q'_{ij} とする。 すなわち $q'_{kk} = \frac{1}{\lambda}$, $q'_{ii} = 1$ ($i \neq k$) , $q'_{ij} = 0$ (その他の場合) とする。

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{ij} &= \sum_{s=1}^n q_{is} q'_{sj} \\ &= \sum_{s \neq k} q_{is} q'_{sj} + q_{ik} q'_{kj} \end{aligned}$$

となっている。 ただし $\sum_{s \neq k}$ は $s = 1$ から $s = n$ まで和をとるとき $s = k$ を除いて和をとることを意味する。 $i = k$ のとき $s \neq i (= k)$ なので $q_{is} = 0$ である。 このときは $\tilde{q}_{kj} = q_{kk} q'_{kj} = \lambda q'_{kj}$ となる。 よって $j = k$ のときは $\tilde{q}_{kj} = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1$ それ以外は $\tilde{q}_{kj} = 0$ となる。 $i \neq k$ のとき $q_{ik} = 0$ なので $\tilde{q}_{ij} = \sum_{s \neq k} q_{is} q'_{sj}$ となるが q_{is} は $s = i$ のときのみ 0 ではないので $\tilde{q}_{ij} = q_{ii} q'_{ij}$ となる。 よって $i = j$ のとき $\tilde{q}_{ij} = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1$, $i \neq j$ のとき $\tilde{q}_{ij} = 0$ となる。 いずれの場合も $\tilde{q}_{ij} = \delta_{ij}$ となるので $Q_n(k; \lambda) Q_n\left(k; \frac{1}{\lambda}\right) = E_n$ となる。 よって $Q_n(k; \lambda)^{-1} = Q_n\left(k; \frac{1}{\lambda}\right)$ である。

$R_n(k, \ell; \alpha) R_n(k, \ell; -\alpha)$ を計算する。 この積の行列の (i, j) 成分を \tilde{r}_{ij} とする。 $R_n(k, \ell; \alpha)$ の (i, j) 成分はプリント通り r_{ij} , $R_n(k, \ell; -\alpha)$ の (i, j) 成分を r'_{ij} とする。 すなわち $r'_{k\ell} = -\alpha$, $r'_{ii} = 1$, $r'_{ij} = 0$ (その他の場合) とする。

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{ij} &= \sum_{s=1}^n r_{is} r'_{sj} \\ &= \sum_{s \neq k} r_{is} r'_{sj} + r_{ik} r'_{kj} \end{aligned}$$

となっている。 最初に $i = k$ の場合を考える。 このとき $s \neq i (= k)$ なので $\tilde{r}_{kj} = \sum_{s \neq k} r_{ks} r'_{sj} + r_{kk} r'_{kj} = r_{k\ell} r'_{\ell j} + r'_{kj} = \alpha r'_{\ell j} + r'_{kj}$ である。 $j = k$ のとき $\tilde{r}_{kk} = \alpha r'_{\ell k} + r'_{kk} = 1$ であり、 $j = \ell$ のとき $\tilde{r}_{k\ell} = \alpha r'_{\ell\ell} + r'_{k\ell} = \alpha - \alpha = 0$ であり、 $j \neq k, \ell$ のとき $\tilde{r}_{kj} = 0$ となる。 次に $i = \ell$ の場合を考える。 このとき $\tilde{r}_{\ell j} = \sum_{s \neq k} r_{\ell s} r'_{sj} + r_{\ell k} r'_{kj} = r_{\ell\ell} r'_{\ell j} = r'_{\ell j}$ である。 $j = \ell$ のときは 1 , $j \neq \ell$ のときは 0 である。 最後に $i \neq k, \ell$ の場合を考える。 $\tilde{r}_{ij} = \sum_{s \neq k} r_{is} r'_{sj} = r_{ii} r'_{ij} = r'_{ij}$ なので、 $i = j$ のと

き $1, i \neq j$ のとき 0 になる。いずれの場合も $\tilde{r}_{ij} = \delta_{ij}$ となり、 $R_n(k, \ell; \alpha)R_n(k, \ell; -\alpha) = E_n$ となる。よって $R_n(k, \ell; \alpha)^{-1} = R_n(k, \ell; -\alpha)$ である。

次に転置行列を考える。 $P_n(k, \ell)$ および $Q_n(k; \lambda)$ は $p_{ij} = p_{ji}$ および $q_{ij} = q_{ji}$ が成立しているので $P_n(k, \ell)^T = P_n(k, \ell), Q_n(k; \lambda)^T = Q_n(k; \lambda)$ が成立する。 r_{ij} は $(i, j) = (k, \ell), (\ell, k)$ 以外は $r_{ij} = r_{ji}$ が成立している。 $R_n(k, \ell; \alpha)$ の (k, ℓ) 成分は α , (ℓ, k) 成分は 0 であり、 $R_n(\ell, k; \alpha)$ の (ℓ, k) 成分は α , (k, ℓ) 成分は 0 である。よって $R_n(k, \ell; \alpha)^T = R_n(\ell, k; \alpha)$ となっている。

次は命題 4.13 を示す。前命題と同様に \sum を用いているので、 $n = 3, 4$ で計算すると、議論の

参考になるかもしれない。ここでは最初に $n = 3$ の場合の例を見る。 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に

対し基本行列をかける。

$$P_3(1, 2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

となり 1 行目と 2 行目を入れ替えた行列が得られている。

$$AP_3(1, 2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

となり 1 列目と 2 列目を入れ替えた行列が得られている。 Q_3, R_3 については省略する。

次から一般的な証明である。 $A = (a_{ij}), A' = (a'_{ij})$ とする。

(1) $A' = P_n(k, \ell)A$ のとき $a'_{ij} = \sum_{s=1}^n p_{is}a_{sj}$ である。 $i \neq k$ かつ $i \neq \ell$ については $p_{is} = \delta_{is}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^n p_{is}a_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^n \delta_{is}a_{sj} \\ &= \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の i 行は一致している。 $i = k$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{kj} &= \sum_{s=1}^n p_{ks}a_{sj} \\ &= p_{k\ell}a_{\ell j} = a_{\ell j} \end{aligned}$$

となるので A' の k 行は A の ℓ 行と等しい。 $i = \ell$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{\ell j} &= \sum_{s=1}^n p_{\ell s}a_{sj} \\ &= p_{\ell k}a_{kj} = a_{kj} \end{aligned}$$

となるので A' の ℓ 行は A の k 行と等しい。以上により A' は A の k 行と ℓ 行を入れ換えたものになっている。

(2) $A' = AP_m(k, \ell)$ のとき $a'_{ij} = \sum_{s=1}^m a_{is}p_{sj}$ である。 $j \neq k$ かつ $j \neq \ell$ については $p_{sj} = \delta_{sj}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^m a_{is}p_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^m a_{is}\delta_{sj} \\ &= a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の j 列は一致している。 $j = k$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= \sum_{s=1}^m a_{is}p_{sk} \\ &= a_{i\ell}p_{\ell k} = a_{i\ell} \end{aligned}$$

となるので A' の k 列は A の ℓ 列と等しい。 $j = \ell$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{i\ell} &= \sum_{s=1}^m a_{is}p_{s\ell} \\ &= a_{ik}p_{k\ell} = a_{ik} \end{aligned}$$

となるので A' の ℓ 列は A の k 列と等しい。以上により A' は A の k 列と ℓ 列を入れ換えたものになっている。

(3) $A' = Q_n(k; \lambda)A$ $a'_{ij} = \sum_{s=1}^n q_{is}a_{sj}$ である。 $i \neq k$ については $p_{is} = \delta_{is}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^n q_{is}a_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^n \delta_{is}a_{sj} \\ &= \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の i 行は一致している。 $i = k$ のとき $q_{ks} = \lambda\delta_{ks}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{kj} &= \sum_{s=1}^n q_{ks}a_{sj} \\ &= \lambda\delta_{kk}a_{kj} = \lambda a_{kj} \end{aligned}$$

となるので A' の k 行は A の k 行の λ 倍になっている。

(4) $A' = AQ_m(k; \lambda)$ $a'_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}q_{sj}$ である。 $j \neq k$ については $p_{sj} = \delta_{sj}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^m a_{is}q_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^m a_{is}\delta_{sj} \\ &= a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の j 列は一致している。 $j = k$ のとき $q_{sk} = \lambda\delta_{sk}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= \sum_{s=1}^m a_{is}q_{sk} \\ &= a_{ik}\lambda\delta_{kk} = \lambda a_{ik} \end{aligned}$$

となるので A' の k 列は A の k 列の λ 倍になっている。

(5) $A' = R_n(l, \ell; \alpha)A$ $a'_{ij} = \sum_{s=1}^n r_{is}a_{sj}$ である。 $i \neq k$ については $r_{is} = \delta_{is}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^n r_{is}a_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^n \delta_{is}a_{sj} \\ &= \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の i 行は一致している。 $i = k$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{kj} &= \sum_{s=1}^n r_{ks}a_{sj} \\ &= r_{kk}a_{kj} + r_{k\ell}a_{\ell j} = a_{kj} + \alpha a_{\ell j} \end{aligned}$$

となるので A' の k 行は A の k 行に ℓ 行の α 倍を加えたものになっている。

(6) $A' = AR_m(k, \ell; \alpha)$ $a'_{ij} = \sum_{s=1}^m a_{is}r_{sj}$ である。 $j \neq k$ については $r_{sj} = \delta_{sj}$ なので

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{s=1}^m a_{is}r_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^m a_{is}\delta_{sj} \\ &= a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij} \end{aligned}$$

となり A と A' の j 列は一致している。 $j = \ell$ のとき

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= \sum_{s=1}^m a_{is}r_{s\ell} \\ &= a_{ik}r_{k\ell} + a_{i\ell}r_{\ell\ell} = \alpha a_{ik} + a_{i\ell} \end{aligned}$$

となるので A' の l 列は A の l 列に k 列の λ 倍を加えたものになっている。

演習問題 4.10 次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

計算方法は理解していると思うので結果のみを記す。

$$(1) \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$