線型代数 II 問題解説 #3

河野

演習問題 5.1　命題 5.2 を証明せよ。

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix}$ とおく。次の計算より命題 5.2 が証明させる。

(1)

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) &= \begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = (a+a')d - b(c+c') = ad - bc + a'd - bc' \\
&= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) \\
\det(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = (\alpha a)d - b(\alpha c) = \alpha(ad - bc) \\
&= \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\
\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}') &= \begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = a(d+d') - (b+b')c = ad - bc + ad' - b'c \\
&= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}') \\
\det(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) &= \begin{vmatrix} a & \alpha b \\ c & \alpha d \end{vmatrix} = a(\alpha d) - (\alpha b)c = \alpha(ad - bc) \\
&= \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})
$$

(3)　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので

$$
\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1
$$

演習問題 5.2　$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が (1), (2) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ である事を示せ。この事から (1), (2), (3) を満たせば，$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が分かる。**ヒント**：$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2$

のとき，$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = aD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b}) + cD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b})$ を示す。同様に $\boldsymbol{b}$ も $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2$ として $D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b})$ および $D(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b})$ を計算していく。

$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が (1) 多重線型性，(2) 交代性を満たすとする。$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -D(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ において $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ とすると $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = -D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ となる。よって $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0$ である。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2$ とおく。これを計算していく。

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= D(a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b}) = D(a\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b}) + D(c\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}) \\
&= aD(\boldsymbol{e}_1, b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) + cD(\boldsymbol{e}_2, b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) \\
&= aD(\boldsymbol{e}_1, b\boldsymbol{e}_1) + aD(\boldsymbol{e}_1, d\boldsymbol{e}_2) + cD(\boldsymbol{e}_2, b\boldsymbol{e}_1) + cD(\boldsymbol{e}_2, d\boldsymbol{e}_2) \\
&= abD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) + adD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) + bcD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) + cdD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) \\
&= adD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) + bcD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) = adD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) - bcD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) \\
&= D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)(ad - bc) = D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

よって示された。

演習問題 ***5.3**　命題 5.8 及び 5.9 を証明せよ。

最初に命題 5.8 を証明する。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}$ とおく。

(1)

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 + x'_2 & y_2 \\ x_3 + x'_3 & y_3 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} x_3 + x'_3 & y_3 \\ x_1 + x'_1 & y_1 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} x_1 + x'_1 & y_1 \\ x_2 + x'_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_2 & y_2 \\ x'_3 & y_3 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_3 & y_3 \\ x'_1 & y_1 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_1 & y_1 \\ x'_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x'_2 & y_2 \\ x'_3 & y_3 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} x'_3 & y_3 \\ x'_1 & y_1 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} x'_1 & y_1 \\ x'_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha x_2 & y_2 \\ \alpha x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha x_3 & y_3 \\ \alpha x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha x_1 & y_1 \\ \alpha x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \alpha\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \alpha\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2+y_2' \\ x_3 & y_3+y_3' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3+y_3' \\ x_1 & y_1+y_1' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1+y_1' \\ x_2 & y_2+y_2' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2' \\ x_3 & y_3' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3' \\ x_1 & y_1' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1' \\ x_2 & y_2' \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2' \\ x_3 & y_3' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3' \\ x_1 & y_1' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1' \\ x_2 & y_2' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\times(\alpha\boldsymbol{y}) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & \alpha y_2 \\ x_3 & \alpha y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & \alpha y_3 \\ x_1 & \alpha y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & \alpha y_1 \\ x_2 & \alpha y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \alpha\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \alpha\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

(2)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \\
\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1 &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2
\end{aligned}$$

演習問題 5.4　命題 5.11 を証明せよ。

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ で張られる平行 6 面体を W とする。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る平行 4 辺形を底面と考える。底面の面積は $|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}|$ である。底面と $\boldsymbol{z}$ のなす角を θ とするし，高さを h とすると $h=|\boldsymbol{z}|\sin\theta$ が成立し

ている。$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ は底面と直交しているので $\boldsymbol{z}$ となす角は $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ である。W の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= (\text{底面積})\times(\text{高さ}) = |\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}||\boldsymbol{z}|\sin\theta = |\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}||\boldsymbol{z}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ &= (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

となる。符号については各自確かめよ。本来なら $V=|(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|$ となるはずが「証明」された式は $V=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ となっており，この「証明」は間違いを含んでいるはずである。どこに間違いがあったか指摘し，証明を完全なものにすることを追加の問題としておく。

演習問題 5.5　命題 5.13 を証明せよ。

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

とおく。$\widetilde{A}A$ の $(1,1)$–成分は

$$(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_1+(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_2+(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_3$$

なので線型性より

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_1+(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_2+(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_3 &= (x_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+(x_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+(x_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ &= ((x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3)\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ &= (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \det(A) \end{aligned}$$

となる。$\widetilde{A}A$ の $(1,2)$–成分は

$$(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_1+(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_2+(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_3$$

なので線型性より

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_1+(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_2+(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})y_3 &= (y_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+(y_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+(y_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ &= ((y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+y_3\boldsymbol{e}_3)\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ &= (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0 \end{aligned}$$

となる。ほかの成分も同様に計算できて命題が示される。