線型代数 II 問題解説 #4 河野

5.1 行列式の定義と性質

演習問題 5.6 $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ $(i < j)$ のとき $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ を示せ。

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

が成立しているので $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ のとき

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

が成立する。よって

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$$

が成立する。

演習問題 *5.7 補題 5.18 の証明を完全なものにせよ。

きちんと書くと結構長い。繰り返しが多いのでポイントだけ。

方針は $F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が成立する $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ から出発して増やして行き，すべてのベクトルの組について成立することを示す。$C = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ とおき，$F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = C \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の成立を示して行く。$F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = C \times 1 = C \det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ より $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ については成立している。

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) &= -F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\ &= -C \det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\ &= C \det(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \end{aligned}$$

より $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ について成立している。これを繰り返して行くことにより，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を適当に何回か入れ換えたものについては成立していることが示される。ベクトルの組の中に同じものを含むとき $F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0 = C \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ なので $1 \leqq a(i) \leqq n$ を満たす $a(i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ について $a(i) = a(j)$ $(i \neq j)$ となる i, j が存在するときは

$$F(\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}) = C \det(\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)})$$

が成立している。そのような i, j が存在しないとき $\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}$ は $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の順序を何回か入れ替えて得られるので前述のことより $F(\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}) = C \det(\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)})$ となりいずれの場合も

$$F(\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}) = C \det(\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)})$$

が成立する。

$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$ を任意のベクトルとするとき

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{a(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}) &= F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{a(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i F(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{a(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i C \det(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{a(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}) \\
&= C \det\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{a(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}\right) \\
&= C \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{a(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)})
\end{aligned}$$

となり $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}$ に対し成立している。$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_k$ を任意のベクトルとし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{e}_{a(k)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}$ に関し成立しているとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_{a(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}$ に関する成立を示す。これが示されれば数学的帰納法により補題 4.15 が示される。$\boldsymbol{a}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{e}_i$ とおく。

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_{a(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}) &= F\left(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{a(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ki} F\left(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{a(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ki} C \det\left(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{a(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}\right) \\
&= C \det\left(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{a(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}\right) \\
&= C \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_{a(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)})
\end{aligned}$$

より成立している。

演習問題 5.8　テキストを参考にして定理 5.22 を証明せよ。

ここからこの節の最後まではは小文字で書いた部分なので，すべての演習問題に [*](星印) がついていると思ってください。

置換 $\sigma \in S_n$ に対し σ で動かない数の集まりを固定点集合という。固定点集合は $\mathrm{Fix}(\sigma) = \{\, i \in N \mid \sigma(i) = i \,\}$ と定義される。固定点集合の上からの帰納法で証明する。$\mathrm{Fix}(\sigma)$ の要素の数が n のとき，σ は恒等置換 (任意の i について $\sigma(i) = i$ となる置換) である。このとき σ は 0 個の互換の積と考えてもよいし，ある互換 τ に対し $\sigma = \tau \circ \tau$ とも書ける。固定点が k 個以上の示されていることを仮定する。σ を固定点が $k-1$ 個とする。i を固定点ではない数とする。このとき $\sigma(i) = j$ とおくと，$j \neq i$ である。τ を i を j に移し，j を i に移し，他の数は固定する互換とする。このとき $\tau \circ \sigma$ の固定点は σ の固定点に i を加えた集合を含んでいる。よって $\tau \circ \sigma$ は互換 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ が存在して，$\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \cdots \tau_n$ と書ける。このとき $\tau^2 = id$ なので

$$\sigma = \tau \circ \tau_1 \circ \cdots \tau_n$$

と表すことができる。

写像 $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\, 1, -1 \,\}$ で次を満たすものを定義できる。

(1)　τ が互換のとき $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$

(2) $\mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau)=\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$
実際

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\prod_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

とおくと上を満たす。ただし $\displaystyle\prod_{i<j}$ は $1\leqq i<j\leqq n$ となるすべての i,j に関して積をとったものである。

$\mathrm{sgn}(\sigma)=\pm 1$ となることは $\displaystyle\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i))$ と $\displaystyle\prod_{i<j}(j-i)$ の絶対値が等しいことから分かる。τ が互換で k と ℓ を入れ替えているとする。ただし $k<\ell$ とし，$\prod'$ を積のうち $i=k$ かつ $j=\ell$ を除いた積とする。このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\tau) &= \prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}\\ &= \frac{\tau(\ell)-\tau(k)}{\ell-k}\prod{}'\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}\\ &= \frac{k-\ell}{\ell-k}\prod{}'\frac{j-i}{j-i}\\ &= -1\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau) &= \prod_{i<j}\frac{\sigma\circ\tau(j)-\sigma\circ\tau(i)}{j-i}\\ &= \prod_{i<j}\frac{\sigma\circ\tau(j)-\sigma\circ\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)}\prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}\\ &= \prod_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}\\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)\end{aligned}$$

が成立する。

$\sigma\in S_n$ が k 個の互換 $\tau_1,\ldots,\tau_k$ の積のとき

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\prod_{i=1}^{k}\mathrm{sgn}(\tau_i)=\prod_{i=1}^{k}(-1)=(-1)^k$$

となる。よって偶数個か奇数個かは σ によって決まっている。

演習問題 5.9　$n=3$ の場合定義 5.23 を具体的に書き下せ。

$\sigma\in S_3$ が $\sigma(1)=i,\sigma(2)=j,\sigma(3)=k$ となるとき $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ と書くことにする。S_3 には 6 個の元があるがこれを $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$,$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$,$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ $\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$,$\sigma_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$,$\sigma_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ とする。$\mathrm{sgn}(\sigma_1)=\mathrm{sgn}(\sigma_4)=\mathrm{sgn}(\sigma_5)=1$, $\mathrm{sgn}(\sigma_2)=\mathrm{sgn}(\sigma_3)=\mathrm{sgn}(\sigma_6)=-1)$ となるので

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_3}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\\ &= \mathrm{sgn}(\sigma_1)a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}a_{3\sigma_1(3)}+\mathrm{sgn}(\sigma_2)a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}a_{3\sigma_2(3)}+\mathrm{sgn}(\sigma_3)a_{1\sigma_3(1)}a_{2\sigma_3(2)}a_{3\sigma_3(3)}\\ &\quad+\mathrm{sgn}(\sigma_4)a_{1\sigma_4(1)}a_{2\sigma_4(2)}a_{3\sigma_4(3)}+\mathrm{sgn}(\sigma_5)a_{1\sigma_5(1)}a_{2\sigma_5(2)}a_{3\sigma_5(3)}+\mathrm{sgn}(\sigma_6)a_{1\sigma_6(1)}a_{2\sigma_6(2)}a_{3\sigma_6(3)}\\ &= a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

となる。

演習問題 5.10　ここで定義した $\det(A)$ が定義 5.15 の (1) 多重線型性,(2) 交代性,(3) 単位の値を満たす事を示せ (テキスト参照の事)。

定義 5.15 は列と行を反対に定義してしまいました。このままでは行に関する多重線型性，交代性はすぐに示すことができますが，列に関しては直接は難しくなります。そこで定義 5.15 の列と行を入れ換えたものと定義 5.15 が等しくなることを最初に示しておきます。

$\sigma \in S_n$ とする。σ に対しその逆写像を σ^{-1} とする。σ と σ^{-1} は一対一対応するので，σ が S_n をすべてうごくとき，σ^{-1} も S_n をすべて動く。よって

$$\sum_{\sigma\in S_n}(\sigma\text{に関するある式}) = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n}(\sigma^{-1}\text{に関するある式})$$

が成立する。

$a_{i\sigma(i)}$ に対し $\sigma(i) = i'$ とおくと $i = \sigma^{-1}(i')$ なので $a_{\sigma^{-1}(i')i'}$ と書ける。$\sigma^{-1} = \tau$ とおくと，$a_{i\sigma(i)} = a_{\tau(i')i'}$ となっている。$a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ の順序を入れ換えて，$\sigma(i)$ が小さい順に並ぶように並べ換えると，

$$a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\tau(1)1}\cdots a_{\tau(n)n}$$

とできる。また $\sigma\circ\sigma^{-1} = id$ より $1 = \mathrm{sgn}(id) = \mathrm{sgn}(\sigma\circ\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ なので，$\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm1$ より $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\tau)$ となる。よって

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\tau)a_{\tau(1)1}\cdots a_{\tau(n)n}\\
&= \sum_{\tau\in S_n}\mathrm{sgn}(\tau)a_{\tau(1)1}\cdots a_{\tau(n)n}
\end{aligned}$$

となる。これを改めて

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n) = \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

と書き直す。

他も同様に示すことができるので，1 番目の成分に関する線型性のみ示す。$A = (a_{ij})$,
$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j}\\ \vdots \\ a_{nj}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}'_1 = \begin{pmatrix} a'_{1j}\\ \vdots \\ a'_{nj}\end{pmatrix}$ とする。

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}'_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)(a_{\sigma(1)1}+a'_{\sigma(1)1})a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\left(\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}+\mathrm{sgn}(\sigma)a'_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\right)\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}+\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a'_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n})\\
&= \det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n)+\det(\boldsymbol{a}'_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n)\\
\det(\alpha\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\alpha a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&= \alpha\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&= \alpha\det(\alpha\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n)
\end{aligned}$$

交代性に関しては 1 番目と 2 番目の成分を入れ換えた場合に示す。$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}_j$ $(j > 2)$ とする。ここで $\boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{hj} \end{pmatrix}$ としておく。また τ を 1 と 2 を入れ換える互換としておく。ここで $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ である。σ が S_n をすべてうごくとき $\sigma \circ \tau$ も S_n をすべてうごくので，先程の和の変形と同様の変形が出来ることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n) &= \det(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \ldots, \boldsymbol{b}_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)2} a_{\sigma(2)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(\tau(2))2} a_{\sigma(\tau(1))1} \cdots a_{\sigma(\tau(n))n} \\
&= \mathrm{sgn}(\tau)\,\mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(\tau(1))1} a_{\sigma(\tau(2))2} \cdots a_{\sigma(\tau(n))n} \\
&= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau) a_{\sigma(\tau(1))1} a_{\sigma(\tau(2))2} \cdots a_{\sigma(\tau(n))n} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) a_{\sigma\circ\tau(1)1} a_{\sigma\circ\tau(2)2} \cdots a_{\sigma\circ\tau(n)n} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)
\end{aligned}
$$

となる。

単位の値は定義 5.15 通りでも，変形したものでも計算できる。$\boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}$ $(j = 1, \ldots, n)$ とする。$\delta_{\sigma(j)j}$ は $\sigma(j) = j$ でない場合は 0 である。よって和をとるとき $\sigma(j) \neq j$ となる σ は除外してよい。これを $j = 1$ から n まで考えると，残るのは $\sigma_0(1) = 1, \sigma_0(2) = 2, \ldots, \sigma_0(n) = n$ となる恒等置換 σ_0 のみである。よって

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \delta_{\sigma(1)1} \delta_{\sigma(2)2} \cdots \delta_{\sigma(n)n} \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma_0) \delta_{\sigma_0(1)1} \delta_{\sigma_0(2)2} \cdots \delta_{\sigma_0(n)n} \\
&= \delta_{11} \delta_{22} \cdots \delta_{nn} \\
&= 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1
\end{aligned}
$$

演習問題 5.11　次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$ (因数分解した形で)　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$ (因数分解した形で)

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ (n は 5 以上の自然数)

簡単なものは計算結果のみを示します。行列式の求め方が分からない人は重傷です。友人に聞いて理解するか，私のところに質問に来てください。

(1) 160

(2) -2 この問題はタイプミスで本当は $(3,3)$–成分を 1 にするはずでした。そうならば値は -3 でした。

(3) $x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3) + 2$

(4) $x_1x_2x_3x_4 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 3$ (3)(4) を見ると，何か法則性がありそうですね。興味のある人は一般の n 次行列の場合を考えて見てください。行列は対角成分以外はすべて 1 で対角成分が順に $x_1, x_2, \ldots, x_n$ となっている行列です。

(5)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 列の}-1 \text{ 倍を } 2 \text{ 列に}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 列の}-1 \text{ 倍を } 3 \text{ 列に}) \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 列の}-1 \text{ 倍を } 2 \text{ 列に}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^3 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 列の}-1 \text{ 倍を } 3 \text{ 列に})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 - x_1^2 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} \quad (1\text{ 列の}-1\text{ 倍を }4\text{ 列に}) \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 - x_1^2 \\ x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 & x_4 + x_1 \\ x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 & x_4^2 + x_4 x_1 + x_1^2 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \times \\
&\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 & x_4 + x_1 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} \quad (2\text{ 行の}-x_1\text{倍を }3\text{ 行に}) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \times \\
&\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} \quad (1\text{ 行の}-x_1\text{倍を }2\text{ 行に}) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \\
&= \prod_{i>j} (x_i - x_j)
\end{aligned}
$$

ただし $\prod_{i>j}$ は $4 \geqq i > j \geqq 1$ となるすべての i, j に関して積をとったもの。

(7) 前問，前々問で予想がついたかもしれない。結果は

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)
$$

となる。ただし，$\prod_{i>j}$ は $n \geqq i > j \geqq 1$ となるすべての i, j に関して積をとったものとする。証明は n に関する帰納法で行う。$n-1$ のとき成立を仮定する。文字 $x_2, \ldots, x_n$ に適用すると

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}{}' (x_i - x_j)
$$

を得る。ただし $\displaystyle\prod_{i>j}{}'$ は $n \geqq i > j \geqq 2$ となるすべての i, j に関して積をとったものとする。

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{(1 列の -1 倍を 2 列目に)} \\
&= \quad \cdots \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{(1 列の -1 倍を n 列目に)} \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} + x_2^{n-3}x_1 + \cdots + x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} + \cdots + x_1^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 + x_1 & \cdots & x_n + x_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} + x_2^{n-3}x_1 + \cdots + x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} + \cdots + x_1^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 + x_1 & \cdots & x_n + x_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad \text{($n-2$ 行の $-x_1$ 倍を $n-1$ 行目に)} \\
&= \quad \cdots \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad \text{(1 行の $-x_1$ 倍を 2 行目に)} \\
&= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \prod_{i>j}{}'(x_i - x_j) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)
\end{aligned}
$$

よって任意の n について等式が成立する。