

演習問題 5.12 次の行列が逆行列を持つ時はそれを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

ただし, a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。最初にこの節で学んだ方法で計算し, その後以前学んだ基本変形を用いる方法で計算せよ。そして計算量を比較せよ。

逆行列を持たない番号のものは, それがわかった段階で終了してもよいし, 計算力をつけるため友人の番号で計算してもよい。

さらに力をつけたいものは a, b, c, d を一般の定数として計算せよ。

$$\begin{aligned} \text{小行列は } A_{11} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ b & c & d \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & c & d \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & b & d \end{pmatrix}, A_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ b & c & d \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & c & d \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & b & d \end{pmatrix}, A_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \\ A_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ b & c & d \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ a & c & d \end{pmatrix}, A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ a & b & d \end{pmatrix}, A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \\ A_{41} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A_{42} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A_{43} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_{44} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ であ} \end{aligned}$$

り, \tilde{A} の成分は

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= \det(A_{11}) = -4c & \tilde{a}_{12} &= -\det(A_{12}) = 3c \\ \tilde{a}_{13} &= \det(A_{13}) = 4a - 3b + d & \tilde{a}_{14} &= -\det(A_{14}) = -c \\ \tilde{a}_{21} &= -\det(A_{21}) = -3b - c + d & \tilde{a}_{22} &= \det(A_{22}) = 3a \\ \tilde{a}_{23} &= -\det(A_{23}) = a & \tilde{a}_{24} &= \det(A_{24}) = -a \\ \tilde{a}_{31} &= \det(A_{31}) = 2b + 2c - 2d & \tilde{a}_{32} &= -\det(A_{32}) = -2a - c + d \\ \tilde{a}_{33} &= \det(A_{33}) = -2a + b & \tilde{a}_{34} &= -\det(A_{34}) = 2a - b \\ \tilde{a}_{41} &= -\det(A_{41}) = 4 & \tilde{a}_{42} &= \det(A_{42}) = -3 \\ \tilde{a}_{43} &= -\det(A_{43}) = -1 & \tilde{a}_{44} &= \det(A_{44}) = 1 \end{aligned}$$

となる。 $4a - 3b - c + d \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{4a - 3b - c + d} \begin{pmatrix} -4c & -3b - c + d & 2b + 2c - 2d & 4 \\ 3c & 3a & -2a - c + d & -3 \\ 4a - 3b + d & a & -2a + b & -1 \\ -c & -a & 2a - b & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

次に基本変形を用いて逆行列を計算する。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1 \text{ 行}) \leftrightarrow (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2 \text{ 行}) \leftrightarrow (3 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1 \text{ 行}) \rightarrow (1 \text{ 行}) - 2 \times (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow (4 \text{ 行}) - a \times (1 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 4a + d & 0 & -a & 2a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow (4 \text{ 行}) - b \times (2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 4a - 3b + d & 0 & -a & 2a - b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow (4 \text{ 行}) - c \times (3 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a - 3b - c + d & -c & -a & 2a - b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4 \text{ 行}) \rightarrow \frac{1}{4a - 3b - c + d} \times (4 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-c}{4a - 3b - c + d} & \frac{-a}{4a - 3b - c + d} & \frac{2a - b}{4a - 3b - c + d} & \frac{1}{4a - 3b - c + d} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4c}{4a - 3b - c + d} & \frac{-3b - c + d}{4a - 3b - c + d} & \frac{2b + 2c - 2d}{4a - 3b - c + d} & \frac{4}{4a - 3b - c + d} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3c}{4a - 3b - c + d} & \frac{3a}{4a - 3b - c + d} & \frac{-2a - c + d}{4a - 3b - c + d} & \frac{-3}{4a - 3b - c + d} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4a - 3b + d}{4a - 3b - c + d} & \frac{a}{4a - 3b - c + d} & \frac{-2a + b}{4a - 3b - c + d} & \frac{-1}{4a - 3b - c + d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-c}{4a - 3b - c + d} & \frac{-a}{4a - 3b - c + d} & \frac{2a - b}{4a - 3b - c + d} & \frac{1}{4a - 3b - c + d} \end{pmatrix}$$

となり、逆行列が求まる。

演習問題 5.13 次のベクトルが 1 次独立かどうか調べよ。ただし a, b は自分の学生番号の下 2 桁。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = -a^3 - b^3 + 3ab - 1 = -(a+b+1)(a^2 + b^2 - ab - a - b + 1)$$

なので、 $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = 0$ の場合は 1 次独立ではなく、 $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \neq 0$ のときは 1 次独立である。 $(a, b \geq 0$ なので $a + b + 1 = 0$ とはならない)

演習問題 5.14 この節の方法で演習問題 5.11 から 2 題問題を選び、行列式を計算せよ。

前の問題解説を参考のこと。ただし、 x_i などを含んでいる場合、この方法では別々に計算したものを再度因数分解しなおす必要があり、例えば (7) など直接計算するのは大変であろう。この方法で解く (7) には (*) 印をつけるべきだったかもしれない。ここでは (7) に関する別解のみ書いて

おく。 $f_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ とおく。 i ($i = 1, \dots, n$) を 1 つ固定して考

える。 x_i のみ変数と思い、他の x_j ($j \neq i$) は定数と考えると $f_n(x_1, \dots, x_n)$ は x_i に関する多項式になっている。これを $g(x_i)$ と書く。即ち $g(x_i) = f_n(x_1, \dots, x_n)$ である。 $g(x_1)$ (即ち $f(x_i)$ の変数 x_i に定数 x_1 を代入して得られるもの) を考えると、1 列目と i 列目が等しい行列の行列式なので $g(x_1) = 0$ である。因数定理より $g(x_i)$ は $x_i - x_1$ で割りきれれる。これを x_2, x_3, \dots と i を除く j ($j = 1, \dots, n$) で実行すると $g(x_i) = f_n(x_1, \dots, x_n)$ は

$$(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

で割りきれることが分かる。これを $i = 1$ から $i = n$ までのすべての i に関して実行すると、任意の i, j (ただし $i \neq j$) に対し $f_n(x_1, \dots, x_n)$ は $x_i - x_j$ で割りきれることが分かる。即ち $f_n(x_1, \dots, x_n)$ は $\prod_{i>j} (x_i - x_j)$ で割りきれれる。よって

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

と書ける。ここで x_1, \dots, x_n をすべて変数と考えたときの多項式の次数を考える。 $f_n(x_1, \dots, x_n)$ の次数は $1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ であり、 $\prod_{i>j} (x_i - x_j)$ の次数も $1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

である。よって $h(x_1, \dots, x_n)$ は定数になる。よってある定数 a_n を用いて

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = a_n \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

と書ける。(5), (6) より $a_3 = 1, a_4 = 1$ となっているので $a_n = 1$ が予想される。これを数学的帰納法で証明する。出発点は示されているので $n - 1$ のとき成立を仮定する。行列式を n 列で展開すると

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+n} x_n^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

となる。 $f_n(x_1, \dots, x_n)$ を変数 x_n に関する多項式と考えると最高次数の係数は

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

である。一方

$$\begin{aligned} f_n(x_1, \dots, x_n) &= a_n \prod_{i>j} (x_i - x_j) \\ &= a_n \prod_{n-1 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k) \end{aligned}$$

と考えると最高次数の係数は $a_n \prod_{n-1 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) = a_n f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ である。よって $a_n = 1$

を得る。以上により

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

が得られる。