線型代数 II 問題解説 #6

河野

演習問題 6.1　次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。実数で求まらない場合は複素数に拡張して考えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

それぞれの問題において与えられた行列を A とおく。

(1)　特性方程式は $\Phi_A(t) = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$ なので特性解は $t = 1, 2, 3$ である。これは実数なのですべて固有値である。1 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ 即ち

$$x - y - 2z = x, \quad 2y = y, \quad y + 3z = z$$

より $y = z = 0$ となる。よって $x = 1$ とし $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

3 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$ 即ち

$$x - y - 2z = 3x, \quad 2y = 3y, \quad y + 3z = 3z$$

より $y = 0, x = -z$ となる。よって $x = -1$ とし $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

2 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ 即ち

$$x - y - 2z = 2x, \quad 2y = 2y, \quad y + 3z = 2z$$

より $y + z = 0, x = y$ となる。よって $x = -1$ とし $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

(2)　$\Phi_A(t) = t^3 = 0$ なので特性解は 0 である。固有値は 0 である。0 に属する固有ベクトルを

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}$ 即ち

$$y = 0, , \quad z = 0$$

となる。よって $x = 1$ とし $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

(3) 特性方程式は $\Phi_A(t) = t^3 - 3t^2 - 14t - 8 = 0$ なので特性解は $t = -2, \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{41}}{2}, \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{41}}{2}$ である。これは実数なのですべて固有値である。-2 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{x}$ 即ち

$$x + 2y + 3z = -2x, \quad 2x + y + 2z = -2y, \quad 3x + 2y + y + z = -2z$$

を解いて $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る。

$\dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{41}}{2}$ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\boldsymbol{x}$ 即ち

$$x{+}2y{+}3z = \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}\right)x, \quad 2x{+}y{+}2z = \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}\right)y, \quad 3x{+}2y{+}y{+}z = \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}z\right)$$

を解いて $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{41}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る。

$\dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{41}}{2}$ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = \left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\boldsymbol{x}$ 即ち

$$x{+}2y{+}3z = \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}\right)x, \quad 2x{+}y{+}2z = \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}\right)y, \quad 3x{+}2y{+}y{+}z = \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}z\right)$$

を解いて $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{41}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る。