線型代数 II 問題解説 #7

河野

演習問題 6.2　補題 6.8 及び命題 6.7 を証明せよ。

補題 6.8 : 最初に「あるゼロでないベクトル x が存在して $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ならば $\det(B) = 0$」を示す。結論を否定すると $\det(B) \neq 0$ なので B には逆行列 B^{-1} が存在する。$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の左から B^{-1} をかけると，$B^{-1}B\boldsymbol{x} = B^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ であるが，$B^{-1}B = E$ なので $B^{-1}B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となり $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となるが，これは矛盾である。

次に「$\det(B) = 0$ ならばあるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$」を示す。行列 B のサイズを n とすると $B = (\boldsymbol{b}_1 \ldots \boldsymbol{b}_n)$ と書ける。$\det(B) = 0$ より $\mathrm{rank}(B) < n$ となり，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ は 1 次独立ではない。よってすべては 0 ではないスカラー $x_1, \ldots, x_n$ が存在して

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots x_n\boldsymbol{b}_n = \mathbf{0}$$

となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと，$x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots x_n\boldsymbol{b}_n = (\boldsymbol{b}_1 \ldots \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ となるので証明が終る。

命題 6.7 : λ を $\Phi_A(t) = 0$ の解で $\lambda \in \mathbb{K}$ とする。このとき $\det(\lambda E - A) = \Phi_A(\lambda) = 0$ なので補題 5.8 より，あるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となる。このとき $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるので，λ が A の固有値である事が分かる。

逆に λ が A の固有値のとき，定義から $\lambda \in \mathbb{K}$ であり，ゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる。$\lambda\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x}$ なので，$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となり，$\Phi_A(\lambda) = 0$ となる。

演習問題 6.3　次の行列の固有値固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1)　特性方程式は $\Phi_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2 = 0$ なので特性解は $t = 1, 2$ である。これは実数なのですべて固有値である。1 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ 即ち

$$4x - 2y - z - w = x, \quad 2x - z - w = y, \quad x - y + z = z, \quad x - y + w = w$$

より $x=y, x-z-w=0$ となる。よって $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}.\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ を選ぶ。

2 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}$ 即ち

$$4x-2y-z-w=2x, \quad 2x-z-w=2y, \quad x-y+z=2z, \quad x-y+w=2w$$

より $z=w, x-y-z=0$ となる。よって $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ を選ぶ。

(2) 特性方程式は $\Phi_A(t)=t^4=0$ なので特性解は $t=0$ である。これは実数なのですべて固有値である。0 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}$ 即ち

$$y=0, \quad z=0, \quad z=0$$

となる。よって $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ を選ぶ。

(3) 特性方程式は $\Phi_A(t)=(t-1)^2(t+1)^2=0$ なので特性解は $t=1,-1$ である。これは実数なのですべて固有値である。1 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ 即ち

$$w=x, \quad z=y, \quad y=z, \quad x=w$$

となる。よって $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}0$ を選ぶ。

-1 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$ 即ち

$$w=-x, \quad z=-y, \quad y=-z, \quad x=-w$$

となる。よって $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

演習問題 6.4　命題 6.9 を証明せよ。

A が対角化可能であるとする。P を正則行列で，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となるものとする。$P = (\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)$ とおくと，$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となる。$AP = A(\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n) = (A\boldsymbol{u}_1 \cdots A\boldsymbol{u}_n)$ かつ $(\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1 \cdots \lambda_n\boldsymbol{u}_n)$ より，各 i $(i = 1, \ldots, n)$ について $A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i\boldsymbol{u}_i$ となる。また P が正則なことから $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立である。各ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ がゼロベクトルになることはない。よって $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立な固有ベクトルである。

逆に n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が存在するとする。$P = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ とおくとき，P は正則である。また

$$\begin{aligned} AP &= A(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = (A\boldsymbol{u}_1, \ldots, A\boldsymbol{u}_n) \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{u}_1, \ldots, \lambda_n\boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので，A は対角化可能である。

演習問題 6.5　次の行列が対角化可能かどうか調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - 9t^2 + 24t - 20 = (t-5)(t-2)^2 = 0$$

なので，固有値は $5, 2$ である。

5 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 5x \\ x + 3y + z &= 5y \\ x + y + 3z &= 5z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 2x \\ x + 3y + z &= 2y \\ x + y + 3z &= 2z \end{aligned}$$

が成立している。これは 3 式とも $x + y + z = 0$ なので，$x + y + z = 0$ をみたすベクトルは 2 に属する固有ベクトルとなる。特に固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$$

なので，固有値は $1, 2, 3$ である。

1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 0x - 2y - z &= x \\ x + 3y + z &= y \\ 2x + 2y + 3z &= z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 0x - 2y - z &= 2x \\ x + 3y + z &= 2y \\ 2x + 2y + 3z &= 2z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

3 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} 0x - 2y - z &= 3x \\ x + 3y + z &= 3y \\ 2x + 2y + 3z &= 3z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2) = 0$$

なので，固有値は $0, 1, 2$ である。

0 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} -x - 2y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} -x - 2y - z &= x \\ x + 2y + z &= y \\ 2x + 2y + 2z &= z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} -x-2y-z &= 2x \\ x+2y+z &= 2y \\ 2x+2y+2z &= 2z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく。$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考える。$\theta = 0$ のとき $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なのですでに対角行列になっている。また $\theta = \pi$ のとき $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ なのでこの場合もすでに対角行列になっている。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^2 - 2\cos\theta t + 1 = 0$$

である。この 2 次方程式の判別式は $\theta \neq 0, \pi$ のとき負なので実数解を持たない。よって対角化不可能である。

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2+1) = 0$$

である。固有値は 1 のみで，重解でないので固有ベクトルで 1 次独立なものを 2 個以上選ぶことはできない。よって対角化不可能である。

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - (a+b+1)t^2 + (a+b+ab)t - b = (t-1)(t-a)(t-b) = 0$$

なので，固有値は $1, a, b$ である。この問題では定数 a, b の条件による場合分けが必要になる。計算を実行してみると分かるが，$a-1$ や $b-a$ 等で式を割りたい場合が発生する。そこで割算を実行できるための条件 $a-1 \neq 0$ や $b-a \neq 0$ 等が必要になる。

最初に $1 \neq a \neq b \neq 1$ の場合を考える。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} x + y + 0z &= x \\ 0x + ay + z &= y \\ 0x + 0y + bz &= z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

a に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} x + y + 0z &= ax \\ 0x + ay + z &= ay \\ 0x + 0y + bz &= az \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ (a-1)x \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

b に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} x + y + 0z &= bx \\ 0x + ay + z &= by \\ 0x + 0y + bz &= bz \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ (b-1)x \\ (b^2 - ba - b + a)x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ b-1 \\ b^2 - ba - b + a \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & 0 & b^2 - ba - b + a \end{pmatrix} \text{ とおくと } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{1-a} & \dfrac{a-b}{(1-a)(b^2 - ba - b + a)} \\ 0 & \dfrac{1}{1-a} & \dfrac{b-1}{(1-a)(b^2 - ba - b + a)} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{b^2 - ba - b + a} \end{pmatrix}$$

であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

$a = b$ のとき a に対応する固有ベクトルで 1 次独立なものを 2 個選ぶことができないので対角化不可能。よって $a \neq b$ とする。

$a = 1$ のとき 1 に対応する固有ベクトルで 1 次独立なものを 2 個選ぶことができないので対角化不可能。$b = 1$ のときも同様に対角化不可能である。

(7)　演習問題 6.3 (1) ですでに固有ベクトルを求めている。$P = (\boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_2\, \boldsymbol{x}_3\, \boldsymbol{x}_4)$ とおくと

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(8)　演習問題 6.3 (2) ですでに求めているが固有値は 1 のみで 1 次独立な固有ベクトルが 1 個しか存在しない。よって対角化不可能である。

(9) 演習問題 6.3 (3) ですでに固有ベクトルを求めている。$P = (\boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_2\,\boldsymbol{x}_3\,\boldsymbol{x}_4)$ とおくと

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 6.6　演習問題 6.5 の行列で対角化不可能な行列に対し複素数の範囲で対角化を試みよ。それでも不可能な場合はその理由を調べ述べよ。

(4) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく。$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考える。$\theta = 0$ のとき $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なのですでに対角行列になっている。また $\theta = \pi$ のとき $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ なのでこの場合もすでに対角行列になっている。よって以下 $\theta \neq 0, \pi$ と仮定する。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^2 - 2\cos\theta t + 1 = 0$$

である。この 2 次方程式の判別式は負なので実数解を持たないが $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ および $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ を解にもつ。

$e^{i\theta}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} \cos\theta\cdot x - \sin\theta\cdot y &= (\cos\theta + i\sin\theta)x \\ \sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y &= (\cos\theta + i\sin\theta)y \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$e^{-i\theta}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} \cos\theta\cdot x - \sin\theta\cdot y &= (\cos\theta - i\sin\theta)x \\ \sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y &= (\cos\theta - i\sin\theta)y \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく。固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2+1) = 0$$

である。

複素数の範囲で固有値は $1, i, -i$ の 3 個である。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} x + 0y - 2z &= x \\ 0x + y + 2z &= y \\ 0x - y - z &= z \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

i に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} x + 0y - 2z &= ix \\ 0x + y + 2z &= iy \\ 0x - y - z &= iz \end{aligned}$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ \left(\dfrac{-1+i}{2}\right)x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベク

トルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \dfrac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$-i$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると,

$$
\begin{aligned}
x + 0y - 2z &= -ix \\
0x + y + 2z &= -iy \\
0x - y - z &= -iz
\end{aligned}
$$

が成立している。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ \left(\dfrac{-1-i}{2}\right)x \end{pmatrix}$ の形をしている。特に固有ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \dfrac{-1-i}{2} \end{pmatrix}$ を選ぶことが出来る。

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{-1+i}{2} & \dfrac{-1-i}{2} \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1+i}{2} & -i \\ 0 & \dfrac{1+i}{2} & i \end{pmatrix}$ であり

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}
$$

と対角化できる。

(6)　この問題は (対角化できない場合は) 特性解が複素数という理由で対角化できない分けではない。固有値の重複度の分だけ 1 次独立な固有ベクトルが存在しないために対角化できない。この事情は複素数に拡張しても同じなので対角化不可能である。

(8)　この問題も (6) と同様に複素数の範囲に拡張しても対角化不可能である。