線型代数 II 問題解説 #8

河野

演習問題 6.7

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 4 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交し長さ 1 の 5 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおく。$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交しているので

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right) = 1x + 1y + 0z + 0w = x + y = 0$$

である。同様に

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4w &= 0 \end{aligned}$$

が成立している。これより $x = w, y = -w, z = -w$ を得るので $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} w \\ -w \\ -w \\ w \end{pmatrix}$ の形をしている。

$\boldsymbol{x}$ の長さは 1 なので

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = w^2 + (-w)^2 + (-w)^2 + w^2 = 4w^2 = 1$$

より $w = \pm\dfrac{1}{2}$ となる。よって求めるベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交しているので

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} \right) = 1u + 1v + 1w + 0x + 0y = u + v + w = 0$$

である。同様に

$$\begin{aligned} u + v + w + x + y &= 0 \\ u + 2v + 3w + 4x + 5y &= 0 \\ u + 2v + w + 2x + y &= 0 \end{aligned}$$

が成立している。これより $u = 0, v = y, w = -y, x = -y$ を得るので $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \\ -y \\ y \end{pmatrix}$ の形をしている。$\boldsymbol{x}$ の長さは 1 なので

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0^2 + y^2 + (-y)^2 + (-y)^2 + y^2 = 4y^2 = 1$$

より $y = \pm\dfrac{1}{2}$ となる。よって求めるベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 6.8　定理 6.17 の証明で 1 次独立性を使っていないように見えるが，実はそのことは使われている。どの部分に使われているか指摘せよ。

$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立でないとき $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ になる。よって $\|\boldsymbol{y}_2\|$ は 0 になるので，$\|\boldsymbol{y}_2\|$ で割ることはできない。一般の場合も同様で $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ が 1 次独立で，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立でないとき $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{v}_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ になるので，$\|\boldsymbol{y}_k\|$ で割り算を実行することができない。

演習問題 6.9　次のベクトルの組からシュミットの直交化法を用いて正規直交系をつくれ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

それぞれのベクトルを順に $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_3$ または $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ とする。

(1)

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

なので

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(2 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 1) = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2 \times (-1) + 1 \times 2 + 3 \times (-1)) = -\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}\right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_3\|}\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(2)

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2$$

なので

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{2}(1\times 1 + 0\times 1 + 1\times 1 + 0\times 1) = 1$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{2}(1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1 + 0\times 1) = \dfrac{3}{2}$,
$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) = \dfrac{1}{2}(1\times 1 + 1\times(-1) + 1\times 1 + 0\times(-1)) = \dfrac{1}{2}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_3\|}\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。

(3)

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2$$

なので

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{2}(0\times 1 + 1\times 1 + 0\times 1 + 1\times 1) = 1$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{2}(0\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1) = \dfrac{3}{2}$,
$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) = \dfrac{1}{2}(0\times(-1) + 1\times 1 + 1\times(-1) + 1\times 1) = \dfrac{1}{2}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_3\|}\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{2}(1\times 1 + 2\times 1 + 3\times 1 + 4\times 1) = 5,$$

$$(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{2}(1\times(-1) + 2\times 1 + 3\times(-1) + 4\times 1) = 1,$$

$(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\times(-1) + 2\times 0 + 3\times 1 + 4\times 0) = \sqrt{2}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_4 &= \boldsymbol{v}_4 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{x}_3)\boldsymbol{x}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 5\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_4 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_4\|}\boldsymbol{y}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 6.10　次の行列 A で表現される線型写像を与えられた基底で表現した場合の行列を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1)　成分に分けて議論する方法と，行列のまま考える方法の 2 通りの方法で解く。

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

と書けるとき

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

と表した。このとき

$$\begin{aligned} x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e_2} &= \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \\ &= a_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1) + a_2(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \\ &= (a_1 + 2a_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_1 + a_2)\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

より

$$x_1 = a_1 + 2a_2, \quad x_2 = a_1 + a_2$$

という関係がある。

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

とすると

$$y_1 = 4x_1 - 2x_2, \quad y_2 = x_1 + x_2$$

なる関係がある。また $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ と表したとき，$\boldsymbol{x}$ のときと同様に計算すれば

$$y_1 = b_1 + 2b_2, \quad y_2 = b_1 + b_2$$

が得られる。これを逆に解くと

$$b_1 = 2y_2 - y_1, \quad y_2 = y_1 - y_2$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2y_2 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(x_1 + x_2) - (4x_1 - 2x_2) \\ (4x_1 - 2x_2) - (x_1 + x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2(a_1 + 2a_2) + 4(a_1 + a_2) \\ 3(a_1 + 2a_2) - 3(a_1 + a_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より求める表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である。

次に行列のまま考えて解いてみよう。$T_A(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 = 2\boldsymbol{x}_1$，$T_A(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 = 3\boldsymbol{x}_2$ であることに注意しておく。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) \\
&= T_A(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2) \\
&= a_1T_A(\boldsymbol{x}_1) + a_2T_A(\boldsymbol{x}_2) \\
&= a_1 2\boldsymbol{x}_1 + a_2 3\boldsymbol{x}_2 \\
&= 2a_1\boldsymbol{x}_1 + 3a_2\boldsymbol{x}_2 \\
&= \begin{bmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

求める表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である。

(2) $T_A(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 = 3\boldsymbol{x}_1$，$T_A(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{x}_1$，$T_A(\boldsymbol{x}_3) = A\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1$ であることに注意しておく。$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3$，$\boldsymbol{y} = b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + b_3\boldsymbol{x}_3$ と表され，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ となっているとする。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) \\
&= T_A(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3) \\
&= a_1T_A(\boldsymbol{x}_1) + a_2T_A(\boldsymbol{x}_2) + a_3T_A(\boldsymbol{x}_3) \\
&= 3a_1\boldsymbol{x}_1 + 2a_2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 \\
&= \begin{bmatrix} 3a_1 \\ 2a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(3) $T_A(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 = 3\boldsymbol{x}_1$，$T_A(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_2$ であることに注意しておく。(1) と同様に $\boldsymbol{x}$,

$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しておく。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) \\
&= T_A(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2) \\
&= a_1T_A(\boldsymbol{x}_1) + a_2T_A(\boldsymbol{x}_2) \\
&= 3a_1\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \\
&= \begin{bmatrix} 3a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$