線型代数 II 問題解説 #9

河野

演習問題 6.11　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A'\boldsymbol{y})$ が成立するとき，$A = A'$ が成立することを示せ。

$A = (a_{ij}), A' = (a'_{ij})$ とおく。$\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を基本ベクトルとする。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_\ell$ とおくと $(\boldsymbol{e}_k, A\boldsymbol{e}_\ell) = a_{k\ell}$ および $(\boldsymbol{e}_k, A'\boldsymbol{e}_\ell) = a'_{k\ell}$ がなるので，$a_{k\ell} = a'_{k\ell}$ が成立する。これが任意の k, ℓ に対して成立するので $A = A'$ となる。

演習問題 6.12　n 次行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ と表すとき，A が直交行列である必要十分条件は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交系である事である事を示せ。

$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ とおく。

$$\begin{aligned}
A^T A &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n) \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が成立している。

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交系のとき $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$(クロネッカーのデルタ) なので

$$A^T A = E$$

となる。逆に $A^T A = E$ のとき $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ となるので，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は正規直交系である。

演習問題 6.13　補題 6.23 を証明せよ。

(1)　A は対称行列，O は直交行列なので，

$$\begin{aligned}
(O^T A O)^T &= (AO)^T \left(O^T\right)^T \\
&= O^T A^T O \\
&= O^T A O
\end{aligned}$$

なので $O^T A O$ は対称行列である。

(2)

$$\begin{aligned}(OO')^T(OO') &= O'^TO^T(OO') \\ &= O'^Y(O^TO)O' \\ &= O'^TEO' \\ &= O'^TO' \\ &= E\end{aligned}$$

となるので，OO' は直交行列である。

(3) 演習問題 5.17 と同様に計算すると

$$A^TB = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n) \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 6.14 次の対称行列を対角化する直交行列を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) A の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = (t-1)(t-3) = 0$$

なので固有値は $t = 1, 3$ である。3 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ となる。長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix}$ となる。長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1} = P^T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(2) A の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^2(t-3) = 0$$

なので固有値は $t = 0, 3$ である。3 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ となる。長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

0 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$x + y + z = 0$ を得る。1 次独立なベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。シュミットの直交化法を実行すると

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

なので

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(3) A の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^3 - 7t^2 + 12t - 4 = 0$$

であり，$\Phi_A(2) = 0$ となるので $\Phi_A(t) = (t-2)(t^2 - 5t + 2)$ と因数分解できるので固有値は $t = 2, \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ である。2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

$\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{v}_2 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$ となる。

長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}}$ である。$x = \dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} \\ \dfrac{\sqrt{17}-3}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} \end{pmatrix}$

を選ぶ。

$\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{v}_3 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$ となる。

長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-2\sqrt{17}}}$ である。$x = \dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}}$ を選び，$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \\ \dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \end{pmatrix}$

を選ぶ。

$$P = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} & \dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} & \dfrac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{17}-3}{\sqrt{34-6\sqrt{17}}} & -\dfrac{2}{\sqrt{17-3\sqrt{17}}} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4) A の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \det(tE-A) = (t-5)(t-1)^3 = 0$$

なので固有値は $t=5,1$ である。5 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$

となる。長さ 1 なので $x = \pm\dfrac{1}{2}$ である。$x = \dfrac{1}{2}$ を選び，$\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，$x + y + z + w = 0$ を得る。1 次独立なベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。シュミットの直交化法を実行すると $\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} 0$ $\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} 3$ なので

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。