線型代数続論要綱 #1　　2004–4–13　　河野

# 0 Introduction

今のところ章立ては次の様に考えている (今後一部変更はありえる)。

(0) Introduction
(1) **線型空間と線型写像**
　(1.1) $n$ 次元数ベクトル空間
　(1.2) 線型空間
　(1.3) 線型写像
　(1.4) 部分空間
　(1.5) 基底と次元
　(1.6) 固有値と固有空間
　(1.7) 線型写像の行列表示
(2) **内積を持つ線型空間**
　(2.1) 数ベクトル空間の内積
　(2.2) 線型空間の内積
　(2.3) 正規変換
　(2.4) 正規変換の固有値問題
　(2.5) エルミート行列のユニタリー行列による対角化

最初は数学的イントロではなく，非数学的イントロ。

(1) 私語禁止。勿論数学的質問は随時 (私の話している途中でも) してかまわない。

(2) 出席はとらない。成績は基本的に試験で判断する。補助的に演習, レポートも用いる事がある。

(3) 教室への出入りは自由ではない。途中入室・途中退室は自由だが，再度入室する意思をもって退室する場合は私の許可をとってから退室する事。ただし,「タバコを吸いたい」「電話をかけたい」等の理由は原則不許可。

(4) 携帯電話について：電源 OFF でなくてもよいが，1) 音が出ないようにする，2) 時計以外の機能を使用しない，という条件で使用する事。

(5) 講義をしっかり聞き分からない所はその場で質問をするようにして欲しい。もちろん後での質問がダメという意味ではなく，質問は随時受け付けている。e–mail での質問も受け付けている (address は kouno@math.cs.kitami-it.ac.jp)。

(6) 上と関連して，演習問題の解答をプリントにして配るという事はしない。所謂「正解」と比べて自分の解答の正誤を判断するのではなく，自分の力で正誤を判断して欲しいからそうしている。今年から「演習問題の解説」を 2 週遅れぐらいで web page に載せようと考えている。

なおこれから講義で配るプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html に pdf 形式で置く予定である。演習問題の解説もここに載せる予定 (講義での配布は今の所考えていない)。試験の掲示等も web page に載せる予定。

# 1 線型空間と線型写像

この章では線形解析 I 及び II で学んだ $n$ 次元数ベクトル空間と線形写像を一般化する。最初に $n$ 次元ベクトル空間について復習しておこう。

## 1.1 $n$ 次元数ベクトル空間

線形解析では実ベクトル空間と複素ベクトル空間を扱った。この 2 つを一度に論議するために $\boldsymbol{K}$ という記号を導入する。$\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{R}$(実数全体の集合) または $\boldsymbol{C}$(複素数全体の集合) を表わし $\boldsymbol{K}$ の元をスカラーと呼ぶことにする。そして $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間というものを考える。$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ のときは実ベクトル空間，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ のときは複素ベクトル空間になる。$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間の定義は以下の通りであった。

**定義 1.1** $n$ を自然数とする。$n$ 個のスカラー $a_1,\dots,a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と書いて $K$ 上の $n$ **次元ベクトル**と言う。簡単に $(a_i)$ とも書く。$n$ 次元ベクトル全体を $\boldsymbol{K}^n$ と書いて $K$ 上の $n$ **次元数ベクトル空間**と言う。$K$ が明らかなときは「$K$ 上」を省略する場合がある。

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_i)$ と $\boldsymbol{b}=(b_i)$ が等しいとは，各 $i$ $(i=1,\dots,n)$ に対し $a_i=b_i$ が成立する時と定義する[1]。

$n$ 次元ベクトルには和とスカラーが以下の様に定義されていた。

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^n,\ \alpha\in\boldsymbol{K}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

$(a_i)$, $(b_i)$ の記号を用いると，

$$(a_i)+(b_i)=(a_i+b_i), \qquad \alpha(a_i)=(\alpha a_i)$$

[1] 何を当たり前の事をくどくど述べているのかと思う人もいるかもしれないが,「何を同じと思うか」という事は数学では (でも) 結構大切である。

となる。

次は殆ど自明であるがベクトルの概念を更に拡張する時，大切な役割を果たすので命題としてあげておく。

**命題 1.2** $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{K}^n$ の元とし $\alpha, \beta$ をスカラーとする時次が成立する。

(1) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$　(結合法則)

(2) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$　(交換法則)

(3) 特別な元 $\boldsymbol{o}$ (零ベクトル又は零元と呼ばれる) が存在して任意のベクトルに対し $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{v}$ となる。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しあるベクトル $\boldsymbol{v}'$ が存在して ($\boldsymbol{v}$ の逆元という) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{o}$ となる (普通 $\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}$ と表す)。

(5) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$　(分配法則)

(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$　(分配法則)

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v}=\alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(8) $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

幾つかを証明し残りは演習問題としておく。

**証明**　(1) を示そう。スカラーに関しこのタイプの結合法則は知られているものとする。つまり任意のスカラー $a,b,c$ に対し $a+(b+c)=(a+b)+c$ の成立は仮定する。$\boldsymbol{u}=(u_i), \boldsymbol{v}=(v_i), \boldsymbol{w}=(w_i)$ とする。$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(u_i+v_i)$ であるので，

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=(u_i+v_i)+(w_i)=((u_i+v_i)+w_i)=(u_i+(v_i+w_i))=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$$

よって示された。次に (3)。$\boldsymbol{0}$ をすべての成分が 0 であるベクトルとすると，この性質を満たす事はすぐ分かる。 ∎

**演習問題 1.1**　命題 1.2 を証明せよ。

## 1.2　線型空間

ここではベクトル空間の概念を一般化する。それらも通常ベクトル空間と呼ばれるが，ここでは数ベクトル空間と区別して線型空間という呼び名を与えておこう。ベクトルには和 (足し算) とスカラー倍 が定義されていたが，逆に和 (足し算) とスカラー倍の定義されている集合を線型空間定義し，その各元をベクトルと呼ぶことにしよう。最初に例として和とスカラー倍の定義されている色々な集合を考える。

**例 1.3**　(1) **実 $n$ 次元ベクトル空間**: これについては前の節で考えた。$\boldsymbol{R}^n$ には和と実数倍が定義されている。

(2) **複素 $n$ 次元ベクトル空間**: これについても前の節で考えた。$\boldsymbol{C}^n$ には和と複素数倍が定義されている。

(3) **線型部分空間**: 例えば $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ とおく。$V$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とスカラー $\alpha$ に対し $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ と $\alpha \boldsymbol{v}_1$ も $V$ のベクトルとなる。$\boldsymbol{K}^3$ 全体を考えないで，$V$ のみを考える。このとき $V$ には和とスカラー倍が定義されているとみる事ができる。

(4) $(2,2)$ **行列**: 2 行 2 列の行列を $(2,2)$ 行列 または $2 \times 2$ 行列という。ここで各成分は $\boldsymbol{K}$ の元とする。$M(2\,;\boldsymbol{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \boldsymbol{K} \right\}$ とおく。$M(2\,;\boldsymbol{K})$ には行列の和とスカラー倍が定義されている。

(5) $(m,n)$ **行列**: $(m,n)$ 行列全体の集合 $M(m,n\,;\boldsymbol{K})$ には和とスカラー倍が定義されている。
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M(m,n\,;\boldsymbol{K})$, $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し和，スカラー倍は

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+b_{ij} & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

であった。あるいは

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

とも表す。

$m = n$ のとき $M(m,n\,;\boldsymbol{K})$ を $M(n\,;\boldsymbol{K})$ とも書く。

(6) **多項式**: $x$ に関する実数係数多項式全体の集合を $\boldsymbol{R}[x]$ で表す。この集合には和と実数倍が定義されている。多項式と多項式の和は多項式となるし，多項式の実数倍も多項式になる。また $n$ 次以下の多項式全体の集合を $\boldsymbol{R}_n[x]$ と表す事にする。例えば $\boldsymbol{R}_2[x]$ は 2 次以下の多項式全体の集合，つまり 2 次式，1 次式，0 次式 (定数) 全体からなる集合である。2 次以下の多項式の和は 2 次以下の多項式になるし，実数倍も 2 次以下の多項式になるので，$\boldsymbol{R}_2[x]$ にも和と実数倍が定義されている。

同様に複素数係数の多項式全体の集合を $\boldsymbol{C}[x]$，$n$ 次以下の複素数係数の多項式全体を $\boldsymbol{C}_n[x]$ と書く。これらには $\boldsymbol{R}[x], \boldsymbol{R}_2[x]$ の場合と同様に和と複素数倍が定義できる。

(7) **関数**: 集合 $X$ 上で定義された実数値関数全体の集合を $F(X\,;\boldsymbol{R})$ で表す。和と実数倍を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

で定義する。ここでは関数 $f$ と $x$ に於ける値 $f(x)$ とは区別しておく。高校では $x$ に於ける値が $f(x)$ である関数を $f(x)$ と書いて，$f$ を独立的なものとは余り見てこなかったが，この区別は大事である (混乱の恐れのない時はどちらで表してもよい)。

同様に集合 $X$ 上で定義された複素数値関数全体の集合を $F(X\,;\boldsymbol{C})$ で表す。これにも和と複素数倍が定義される。スカラー $\boldsymbol{K}$ を用いて一度に表すと，$X$ から $\boldsymbol{K}$ への関数全体の集合を $F(X\,;\boldsymbol{K})$ とするとき，$F(X\,;\boldsymbol{K})$ には和とスカラー倍が定義される。

(8) **連続関数**: 集合 $X$ を $\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ の部分集合とする。$X$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合を $C^0(X\,;\boldsymbol{R})$ とする。連続関数と連続関数の和，連続関数の実数倍はやはり連続関数になるので，和と実数倍が定義できる。

また複素数値関数に対し同様に考えると，定義できる集合を $C(X;\boldsymbol{C})$ と書く。これにはやはり和と複素数倍が定義される。

(9) **微分可能な関数**: 自然数 $n$ を 1 つ固定する。集合 $X$ を $\boldsymbol{R}$ の開集合とする。ただし $X$ は空集合でないものとする。$X$ 上で定義された実数値関数で $C^n$ 級(2)なもの全体の集合を $C^n(X\,;\boldsymbol{R})$ とする表す。$C^n$ 級関数の和及び $C^n$ 級関数の実数倍は共に $C^n$ 級関数なので，$C^n(X\,;\boldsymbol{R})$ に和と実数倍が定義される。

何回でも微分可能な関数を $C^\infty$ 級の関数といい，$X$ 上で定義された $C^\infty$ 級全体の集合を $C^\infty(X\,;\boldsymbol{R})$ で表す。$C^\infty$ 級関数の和及び $C^\infty$ 級関数の実数倍は共に $C^\infty$ 級関数なので，$C^\infty(X\,;\boldsymbol{R})$ に和と実数倍が定義される。

$X$ 上で定義された関数 $f$ が各点のまわりで Taylor 級数展開可能のとき，$f$ は $X$ で $C^\omega$ 級と呼ぶ。$X$ 上で定義された実数値関数で，$X$ で $C^\omega$ 級な関数全体のつくる集合を $C^\omega(X\,;\boldsymbol{R})$ と書く。$C^\omega$ 級関数の和及び $C^\omega$ 級関数の実数倍はともに $C^\omega$ 級なので，和と実数倍が定義される。ここで定義した集合の間には

$$C^0(X\,;\boldsymbol{R}) \supsetneq C^1(X\,;\boldsymbol{R}) \supsetneq \cdots \supsetneq C^n(X\,;\boldsymbol{R}) \cdots \supsetneq C^\infty(X\,;\boldsymbol{R}) \supsetneq C^\omega(X\,;\boldsymbol{R})$$

の関係がある(3)。

(10) **周期関数**：実数上で定義された実数値関数 $f$ が次の性質を持つとき，周期 $T$ の周期関数という：ある正の実数 $T$ が存在して任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $f(x+T) = f(x)$ が成立する。周期 $T$ の周期関数 $f, g$ に対し $f+g$ も周期 $T$ の周期関数になり，実数 $\alpha$ に対し $\alpha f$ も周期 $T$ の周期関数になる。周期 $T$ の周期関数全体のつくる集合を $F(\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{R}\,;P[T])$ と表す。この集合には和と実数倍が定義される。$C^n(\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{R}\,;P[T]) = C^n(\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{R}) \cap P[T]$ 等にも和と実数倍が定義される。

(11) **数列全体**: $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ を実数列全体からなる集合とする。2 つの数列 $\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\}$ を考える。$c_i = a_i + b_i (i = 1, \ldots)$ に対し $\boldsymbol{c} = \{c_i\}$ とおくとき，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と定義する。また実数 $\alpha$ に対し $d_i = \alpha a_i (i = 1, \ldots)$ とし，$\boldsymbol{d} = \{d_i\}$ とおくとき $\boldsymbol{d} = \alpha \boldsymbol{a}$ と定義する。$\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ には和と実数倍が定義される。複素数の数列も同様に考えることができる。これを $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{C})$ と書く。

(2) $n$ 階の導関数が存在して，それが連続な関数を $C^n$ 級と呼んだ。

(3) $X$ を $\boldsymbol{C}$ の開集合とし，複素数値関数を考える。複素数の意味で微分可能を実数と同様に定義し，$C^n(X\,;\boldsymbol{C})$ 等も同じように定義する。このとき実数の場合とは違って

$$C^0(X\,;\boldsymbol{C}) \supsetneq C^1(X\,;\boldsymbol{C}) = \cdots = C^n(X\,;\boldsymbol{C}) \cdots = C^\infty(X\,;\boldsymbol{C}) = C^\omega(X\,;\boldsymbol{C})$$

が成立する。この事に関しては工業数学 II で学ぶ。

(12) **フィボナッチ数列**: 任意の自然数 $n$ に対し $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列 $\{a_i\}$ をフィボナッチ数列と言う。Fib をフィボナッチ数列である実数列全体からなる集合とする。数列 $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ をフィボナッチ数列とする。$\{c_i\} = \{a_i\} + \{b_i\}$ とすると，$\{c_i\}$ もフィボナッチ数列となる。また $\{d_i\} = \alpha\{a_i\}$ に対し $\{d_i\}$ もフィボナッチ数列である。

(13) **ある回路の電流の状態**: $G$ をある回路とする。例えば次図の様なものする。

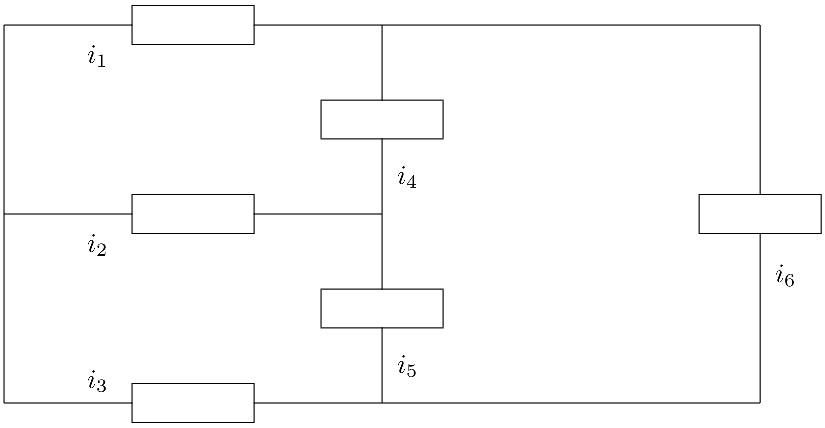


図 1.1

ここで box の部分は素子 (抵抗 and/or 電源等) とするが，black box で中は分からないものとする。$i_1, \ldots, i_6$ は電流，ただし向きは左から右, 下から上にとっておく。状態を表わすベクトルを $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_6)$ とし，可能なすべての状態を表わすベクトルを集めた集合を $V$ とする。ベクトルの和・実数倍を成分同士の和・実数倍で定義できる (何故か，ヒント:キルヒホッフの第 1 法則)。

(14) **ある回路の電圧の状態**: $G$ を (13) の回路とする。各 $i_k$ に対応する電圧を $e_k$ とする。状態を表わすベクトルを $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_6)$ [(4)]とし，可能なすべての状態を表わすベクトルを集めた集合を $W$ とする。ベクトルの和・実数倍を成分同士の和・実数倍で定義できる (何故か，ヒント:キルヒホッフの第 2 法則)。

(15) **線型微分方程式の解空間**: 線型微分方程式を考える。何でもよいがここでは 2 階の微分方程式，例えば $y'' - y' - 2y = 0$ を考える。この微分方程式の解となる関数全体の集合を $V$ とする。つまり

$$V = \{y \mid y'' - y' - 2y = 0\}$$

とする。例えば $y(x) = e^{-x}$ とおくと $y(x) \in V$ である。$y_1(x)$, $y_2(x) \in V$ の時,
$y_1(x) + y_2(x) \in V$，$\alpha y_1(x) \in V$ である[(5)]。解となる関数を実数値関数の範囲で考えるか，複素数値関数で考えるかで，スカラー倍 (実数倍または複素数倍) が定義され，スカラー倍も微分方程式の解になる。

[(4)]実は (13) のベクトル $\boldsymbol{i}$ を列ベクトルで書けば，このベクトルは行ベクトルで書かれるべきである。その理由についてここではふれないが，量子力学のブラベクトルとケットベクトルの関係と同じである。
[(5)]ここでは (8) とは逆に $y(x)$ が関数を表していると見た。勿論 $y \in V$ という書き方も許される。

以上の様な例からベクトル空間の定義を次の様に一般化する[(6)]。

**定義 1.4** 空でない集合 $V$ に和 (足し算) とスカラー倍が定義されていて，次の (1)–(8) の性質を満足する時 $V$ を $\boldsymbol{K}$ 上の**線型空間 (抽象的ベクトル空間)**(*linear space, vector space*)[(7)]といい $V$ の各元を**ベクトル** (vector) と呼ぶ。$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を $V$ の元とし $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ に対し

(1) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ (結合法則)

(2) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (交換法則)

(3) 特別な元 $\boldsymbol{o}$ (零ベクトル又は零元と呼ばれる) が存在して任意のベクトルに対し $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{v}$ となる。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しあるベクトル $\boldsymbol{v}'$ が存在して ($\boldsymbol{v}$ の逆元という) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{o}$ となる (普通 $\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}$ と表す)。

(5) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v}=\alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(8) $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

例 1.3 で取上げた例はいずれも線型空間になる。これをチェックする事は難しくない (→ 演習問題 1.2)。

$V=\boldsymbol{R}$ を考える。$V$ には和と実数倍が定義されていて，定義 1.4 を満たすので，$\boldsymbol{R}$ 上の線型空間となる。また $V=\boldsymbol{C}$ を考えると $V$ には和と複素数倍が定義されていて，定義 1.4 を満たすので，$\boldsymbol{C}$ 上の線型空間となる。更に $V=\boldsymbol{C}$ と考えるが，複素数倍は考えずに実数との積を考えると，$V$ は定義 1.4 を満たすので，$\boldsymbol{R}$ 上の線型空間となる。2 番目と 3 番目は集合は同じ $\boldsymbol{C}$ だが，どの上の線型空間と見てるかという点が異なるので，2 つは別のものである。あとで次元というものを扱うが 2 番目は $\boldsymbol{C}$ 上 1 次元，3 番目は $\boldsymbol{R}$ 上 2 次元である。

**演習問題 1.2** 例 1.3 の例が線型空間になる事をチェックせよ。
**演習問題 1.3** 次を示せ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ がゼロベクトルの性質を持てば $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0}$ である。(これからゼロベクトルは唯 1 つである事が分かる)

(2) $\boldsymbol{v}$ に対し逆元の性質をもつベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が存在すれば $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}'(=-\boldsymbol{v})$ である。(これから逆元は唯 1 つである事が分かる)

(3) ある 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ が成立すれば $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ である。

---

[(6)]命題 1.2 も参照の事。
[(7)]これも通常ベクトル空間と呼ばれるが，この講義では混乱をさけるためにこう呼ぶ事にする。線型代数関係の本を読むときは注意する事。

**演習問題 1.4**　線型空間 $V$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ と任意のスカラー $\alpha$ に対し次が成立する事を示せ。

(1) $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$　　(2) $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

(3) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$