線型代数続論要綱 #2

2004–4–20 河野

1.3 線型写像

定義 1.5 U, V を $\boldsymbol{K}$ 上の線型空間とする。U から V への写像 T が次の 2 つの性質を満たすとき**線型写像** (*linear map*) という。

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ に対し $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$

(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in U$ と任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $T(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v})$

V から V 自身への線型写像 T を V(上) の**線型変換** (*linear transformation*) と呼ぶ。

例 1.6 (1) スカラー $\boldsymbol{K}$ を $\boldsymbol{K}$ 上の線型空間と考える。a を任意のスカラーとする。$\boldsymbol{K}$ から $\boldsymbol{K}$ への写像 T_a を $T_a(x) = ax$ で決めると，T_a は線型写像 (変換) になる。逆に T を $\boldsymbol{K}$ の線型変換とすると，スカラー a が存在して任意の $x \in \boldsymbol{K}$ に対し $y = T(x) = ax$ が成立する。即ち $\boldsymbol{K}$ の線型変換は「正比例」である。

(2) m, n はある自然数とし固定しておく。(m, n) 行列 A を 1 つ選び，この A に対し写像 $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると，T_A は線型写像である。この T_A を行列 A により定まる線型写像という。

(3) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ とする。$T : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義すると T は正射影 (projection) と呼ばれる線型写像になる。

(4) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2; \boldsymbol{K})$ を 1 つ固定する。このとき $M(2; \boldsymbol{K})$ から $M(2; \boldsymbol{K})$ への写像 T を

$$T(X) = AX \qquad (X \in V)$$

で定義すると T は $M(2; \boldsymbol{K})$ 上の線型変換である。

$S(X) = XA$ と定義すると，S も $M(2; \boldsymbol{K})$ 上の線型変換である。行列なので勿論 $S \neq T$ である。

(5) $f(x) \in \boldsymbol{R}[x]$ に対しその導関数を与える多項式 $f'(x)$ を対応させる写像を D とする。即ち $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ に対し $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$ とするとき，$D(f) = f'$ と定義する。この時 D は線型写像である。これを $\boldsymbol{R}_n[x]$ に制限したものも $\boldsymbol{R}_n[x]$ の線型写像である。$a \in \boldsymbol{R}$ を 1 つ固定する。$\boldsymbol{R}[x]$ の変換 T_a を $(T_a(f))(x) = f(x+a)$ で定義すると，T_a は $\boldsymbol{R}[x]$ の線型変換になる。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(6) $I=[0,1]=\{\,x\in\boldsymbol{R}\mid\ 0\leqq x\leqq 1\,\}$ とする。$\boldsymbol{R}$ を 1 次元ベクトル空間と見る。$C^0(I\,;\boldsymbol{R})$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 J を

$$J(f)=\int_0^1 f(x)dx$$

で定義すると J は線型写像である。また $f\in C^0(I\,;\boldsymbol{R})$ に対し

$$g(x)=\int_0^x f(x)dx$$

を対応させる写像を K とする。つまり $K(f)(x)=\displaystyle\int_0^x f(x)dx$ とする。この K は $C(I\,;\boldsymbol{R})$ 上の線型変換である。$f\in C(\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{R})$ とする。K を $K(f)(x)=\displaystyle\int_0^x f(x)dx$ で定義すると，K は $C^0(\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{R})$ の線型変換になる。

(7) $\boldsymbol{a}=\{a_i\}\in\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ に対し $\boldsymbol{b}=\{b_i\}$ を $b_i=a_{i+1}$ $(i=1,2,\ldots)$ とすると，$\boldsymbol{b}\in\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ である。$\boldsymbol{a}$ に対し $\boldsymbol{b}$ を対応させる (シフトと呼ばれる) 写像を S とすると S は線型写像である。$\boldsymbol{a}=\{a_i\}\in\mathrm{Fib}$ とすると $S(\boldsymbol{a})\in\mathrm{Fib}$ となる。よって写像 S を Fib に制限した写像を S' も Fib から Fib への線型写像になる。

(8) $f\in C^\infty(X\,;\boldsymbol{C})$ に対しその導関数 f' を対応させる写像を D とする。$f'\in C^\infty(X\,;\boldsymbol{C})$ であり，D は $C^\infty(X\,;\boldsymbol{C})$ の線形変換となる。また $f\in C^\infty(X\,;\boldsymbol{C})$ に対し $xf(x)$ を対応させる写像を S とすると S は $C^\infty(X\,;\boldsymbol{C})$ の線型変換である。これらの写像は量子力学で重要な役割を果たす。

(9) $V=\{\,y\mid\ y''-y'-2y=0\,\}$ とする。$y(x)\in V$ に対し $y'(x)\in V$ となるので $y(x)$ に対しその導関数 $y'(x)$ を対応させる写像 D が定義できるがこれは線型写像である。

命題 1.7 U,V,W を線型空間とする。線型写像について次が成立する。

(1) V の恒等写像 $\mathrm{id}:V\to V$ は線型写像である。

(2) U の任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ を V のゼロベクトルに写す写像 $O:U\to V$ (これを零写像と呼ぶ) は線型写像である。

(3) 線型写像 $T:U\to V$ と線型写像 $S:V\to W$ に対し，合成写像 $S\circ T$ は U から W への線型写像になる。

(4) T_1,T_2 を U から V への線型写像とする。写像 T_1+T_2 を $(T_1+T_2)(\boldsymbol{u})=T_1(\boldsymbol{u})+T_2(\boldsymbol{u})$ で定義すると，T_1+T_2 は線型写像である。

(5) U から V への線型写像 T とスカラー α に対し，写像 αT を $(\alpha T)(\boldsymbol{u})=\alpha T(\boldsymbol{u})$ で定義すると，αT は線型写像である。

演習問題 1.5　命題 1.7 を証明せよ。

U,V を線型空間とし，U から V への線型写像全体の作る集合を $\mathrm{Hom}(U,V)$ と表す。命題 1.7 より $\mathrm{Hom}(U,V)$ には和とスカラー倍が定義され $\mathrm{Hom}(U,V)$ が線型空間になる事が分かる。

演習問題 1.6　$\mathrm{Hom}(U,V)$ が線型空間になる事を示せ。

定義 1.8 U, V を線型空間とする。T を U から V への線形写像とする。このとき線型写像 T の**像** (*imarge*) を $\mathrm{Im}(T) = \{\, \boldsymbol{y} \in V \mid \ \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in U\,\}$ で定義する。$\ker(T) = \{\, \boldsymbol{x} \in U \mid \ f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\,\}$ を線型写像 T の**核** (*kernel*) という。次節で部分空間を定義したときに示すが，$\mathrm{Im}(T)$ は V の，$\ker(T)$ は U の部分空間になっている。

定義 1.9 線型空間 U から線型空間 V への線型写像 T が 1 対 1 上への写像[1]である時 T を**同型写像** (*isomorphism*) という。2 つの線型空間の間に同型写像が存在する時 U と V は**同型** (*isomorphic*) であるといい，$U \cong V$ と書く。

例 1.6 でいうと

(1) T_a は $a \neq 0$ のとき同型写像，そうでない時は同型写像ではない。

(2) T_A は $m \neq n$ のときは同型写像にならない。$m = n$ のとき，A が正則行列であれば同型写像，そうでなければ同型写像でない。

(3) T は同型写像である。

(4) A が正則 (今の場合 $\det(A) = ad - bc \neq 0$) のとき，S 及び T は同型写像であり，正則でないとき ($\det(A) = 0$) のとき同型写像でない。

(5) $D : \boldsymbol{R}[x] \to \boldsymbol{R}[x]$ は上への写像であるが，一対一写像ではない。これを $\boldsymbol{R}_n[x]$ に制限した写像は上への写像でも，一対一写像でもない。

    T_a は同型写像である。

(6) J は上への写像だが一対一写像でない。K は一対一写像だが上への写像でない。

(7) $S : \mathrm{Seq}(\boldsymbol{R}) \to \mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ は上への写像であるが，一対一写像ではない。$S' : \mathrm{Fib} \to \mathrm{Fib}$ は同型写像である。

(8) D は上への写像であるが，一対一写像ではない。S は一対一写像であるが，上への写像でない。

(9) D は同型写像である。

上の事実の幾つかを証明し，残りは演習問題にする。$f : X \to Y$ が一対一とは，任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ が成立することなので，一対一でない事を示すには，$x_1 \neq x_2$ かつ $f(x_1) = f(x_2)$ を満たす $x_1, x_2 \in X$ が存在する事を示せばよい。$f : X \to Y$ が上への写像であるとは，任意の $y \in Y$ に対し $y = f(x)$ となる元 $x \in X$ が存在する事なので，どの様な $x \in X$ に対しても $y = f(x)$ とはならない様な $y \in Y$ の存在を言えばよい。

最初は (1) を示す。$a \neq 0$ とする。$f_a(x_1) = f_a(x_2)$ と仮定する。$f_a(x) = ax$ なので，$ax_1 = ax_2$ が成立している。両辺を a で割ると ($a \neq 0$ だから可能)$x_1 = x_2$ が得られ，f_a が一対一である事が分かる。次に任意の $y \in \boldsymbol{K}$ に対し $y = f_a(x)$ となる $x \in \boldsymbol{K}$ の存在を示す。y に対し $x = \dfrac{y}{a}$ とおく ($a \neq 0$ だから a で割算が可能)。このとき $f_a(x) = ax = a\dfrac{y}{a} = y$ となり示される。

$a = 0$ の場合を考える。$x_1 = 0, x_2 = 1$ とすると，$x_1 \neq x_2$ である。$f_0(x_1) = 0x_1 = 0$ かつ $f_0(x_2) = 0x_2 = 0$ より $f_0(x_1) = f_0(x_2)$ となるので f_0 は一対一でない。同型写像でない事を示す

[1] $f : X \longrightarrow Y$ が 1 対 1 とは任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し $f(x_1) = f(x_2)$ なら $x_1 = x_2$ が成立する事，上への写像とは任意の $y \in Y$ に対し $y = f(x)$ となる元 $x \in X$ が存在する事である。

にはこれで十分だが，上への写像でない事も示しておこう。$y \in \boldsymbol{K}$ として $y=1$ を選ぶ。このとき任意の $x \in \boldsymbol{K}$ に対し $f_0(x)=0x=0$ なので，$y=f_0(x)$ とはならない。よって f_0 は上への写像ではない。

次に (6) を示す。任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対し $J(f)=a$ となる連続関数の存在をいえば，上への写像である事が示される。f として恒等的に a という値をとる関数をとると，これは連続写像なので $f \in C^0(I\,;\boldsymbol{R})$ となる。このとき $J(f)=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 adx=a$ となるので示された。f_1 を恒等的に 0 である写像，$f_2(x)=x-\dfrac{1}{2}$ とおくと，$f_1,f_2 \in C^0(I\,;\boldsymbol{R})$ である。$J(f_2)=\displaystyle\int_0^1 f_2(x)dx=\int_0^1 x-\frac{1}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right]_0^1=0$ かつ $J(f_1)=\displaystyle\int_0^1 0dx=0$ なので，$J(f_1)=J(f_2)$ となる。$f_1 \neq f_2$ なので J は一対一でない。

$f_1,f_2 \in C^0(I\,;\boldsymbol{R})$ に対して $K(f_1)=K(f_2)$ が成立しているとする。即ち $F_1=K(f_1),F_2=K(f_2)$ とおくとき，任意の $x \in I$ に対し $F_1(x)=F_2(x)$ が成立している。連続関数の積分は微分可能であり，$F_1'(x)=f_1(x),F_2'(x)=f_2(x)$ である。等しい関数の導関数は等しいので $f_1(x)=f_2(x)$，即ち $f_1=f_2$ が成立する。よって K は一対一写像である。$g(x)$ として連続だが微分可能でない関数を選ぶ。例えば $g(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$ とすると，$g \in C^0(I\,;\boldsymbol{R})$ である。今 $f \in C^0(I\,;\boldsymbol{R})$ で $K(f)=g$ となる関数 f が存在したと仮定する。f が連続なので，$K(f)$ は微分可能でなくてはならないが，これは g の選び方に矛盾する。よってこのような f は存在せず，K は上への写像ではない。

最後に (9) を示そう。$y_1,y_2 \in V$ に対して $D(y_1)=D(y_2)$ が成立しているとする。このとき $y_1'(x)=y_2'(x)$ が成立している。両辺を微分すると $y_1''(x)=y_2''(x)$ が得られる。$y_1''(x)-y_1'(x)-2y_1(x)=0$ かつ $y_2''(x)-y_2'(x)-2y_2(x)=0$ が成立しているので，$2y_1(x)=y_1''(x)-y_1'(x)=y_2''(x)-y_2''(x)=2y_2(x)$ となり，$y_1(x)=y_2(x)$ となる。よって D は一対一写像である。任意の $y \in V$ を 1 つ固定する。$D(Y)=y$ となる Y が存在すると $Y(x)=\displaystyle\int_0^x y(x)dx+C$ の形をしている。この C をうまく選ぶ事により $Y \in V$ とできれば上への写像である事が示される。$G(x)=Y''(x)-Y'(x)-2Y(x)$ とおく。$G'(x)=Y'''(x)-Y''(x)-2Y'(x)$ であり $Y'(x)=y(x)$ なので，$G'(x)=y''(x)-y'(x)-2y(x)=0$ となり $G(x)$ は定数関数となる。よって $G(0)=0$ であれば $Y''(x)-Y'(x)-2Y(x)=0$ となり $Y \in V$ となる。$Y(0)=\dfrac{1}{2}\left(y'(0)-y(0)\right)$ であれば上式は成立する。よって $Y(x)=\displaystyle\int_0^x y(x)dx+\frac{1}{2}\left(y'(0)-y(0)\right)$ とおくと，$D(Y)=y$ であり，$G(x)=Y''(x)-Y'(x)-2Y(x)$ とおくとき $G(0)=y'(0)-y(0)-2Y(0)=y'(0)-y(0)-2\dfrac{1}{2}\left(y'(0)-y(0)\right)=0$ となるので，$Y''(x)-Y'(x)-2Y(x)=0$ となり，$Y \in V$ となる。よって D は上への写像である。

演習問題 1.7　上の事実の残りの部分を証明せよ。