線型代数続論要綱 #3

2004–5–11　河野

1.4　部分空間

線型空間には例 1.3 の (1)(2) と (3)，(7)，(8)，(9) などの様にそれ自身がある線型空間の部分集合になっているような線型空間もある。それを部分空間と呼ぶ。定義は以下の様に与えられる。

定義 1.10 線型空間 V の部分集合 W で

(1) $W \neq \emptyset$

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ に対し $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$

(3) 任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{w} \in W$ に対し $\alpha\boldsymbol{w} \in W$

の 3 つの条件を満たすものを (V の) **部分空間** (*subspace*) といい，

$$W < V$$

と表わす。

演習問題 1.8　線型空間 V の部分空間 W が V の演算に関して線型空間になることを示せ。
演習問題 1.9　前節で残していた問題であるが，T を V から U への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(T) < U$, $\mathrm{Ker}(T) < V$ を示せ。

例 1.11　(1) A を (m, n) 行列とする。この時

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\,\}$$

$$\mathrm{Im}(T_A) = \{\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid\ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n\,\}$$

と置くと，$\mathrm{Ker}(T_A)$ は $\boldsymbol{K}^n$ の，$\mathrm{Im}(T_A)$ は $\boldsymbol{K}^m$ の部分空間である。

具体例を考えよう。$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする。このとき $\mathrm{Ker}(T_A), \mathrm{Im}(T_A)$ を具体的に書き表してみよう。$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は 4 つの 1 次方程式で表されるが，変形すると 2 つの方程式

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4w &= 0 \end{aligned}$$

と同値である事が分かる。よって x, y は z, w を用いて $x = z + 2w$, $y = -2z - 3z$ と書けるので，$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z + 2w \\ -2z - 3w \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; z, w \in \boldsymbol{K} \right\}$ となる。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

とすると，$Y-X=4(x+y+z+w)$, $Z-X=8(x+y+z+w)$, $W-X=12(x+y+z+w)$ なので X と Y を用いて $Z=-X+2Y$, $W=-2X+3Y$ と書けるので，$\mathrm{Im}(T_A)=\left\{ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ -X+2Y \\ -2X+3Y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; X, Y \in \boldsymbol{K} \right\}$ となる。

(2) $\boldsymbol{K}_n[x], \boldsymbol{K}[x]$ を例 1.3 の (6) のものとすると，$\boldsymbol{K}_n[x]$ は $\boldsymbol{K}[x]$ の部分空間である。

(3) 例 1.3 の (7)，(8)，(9) の線型空間について，

$$F(X\,;\boldsymbol{R}) > C^0(X,;\boldsymbol{R}) > C^1(X\,;\boldsymbol{R}) > \cdots > C^n(X\,;\boldsymbol{R}) > \cdots > C^\infty(X\,;\boldsymbol{R}) > C^\omega(X\,;\boldsymbol{R})$$

が成立する。

(4) 線型空間 Fib (例 1.3 (12)) は線型空間 $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ (例 1.3 (11)) の部分空間である。

(5) 例 1.3 の (15) の線型微分方程式の解空間は線型空間をなしたが，それに限らず一般の線型微分方程式

$$L\,:\,y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

の解で実数値関数全体からなる線型空間を $\mathrm{De}(L)$ とおくと $\mathrm{De}(L)$ は $C^\infty(\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{R})$ の部分空間である。

微分方程式の解で複素数値関数解全体を $\mathrm{De}(L\,;\boldsymbol{C})$ とすると,$C^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{C})$ の部分空間になる。

(6) V を線型空間，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ を V の部分集合とする。この時

$$\{\,c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k \mid\; c_i \in \boldsymbol{K}\,\}$$

は V の部分空間になる。

(7) V を線型空間とする時，$W=\{\boldsymbol{o}\}$ と V は V の部分空間である。これを**自明な部分空間** (*trivial subspace*) と呼ぶ。

演習問題 1.10　例 1.11 を証明せよ。

定義 1.12 例 1.11(6) の部分空間を $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ で生成される部分空間といい，$<\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n>$ で表し，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ で**生成される部分空間**という。

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k$$

を $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ の**線型結合** (*linear combination*) という。

もう少し一般化しよう。S を線型空間 V の部分集合とする。S を含む V の部分空間で包含関係に関して最小なものを $\langle\, S\,\rangle$ と書く。ただし $S=\emptyset$ のときは $\langle \emptyset \rangle=\{\boldsymbol{0}\}$ と定義する[(1)]。次の演習問題から $\langle\, S\,\rangle$ は存在する事が分かる。

[(1)] あとで定義する基底が線型空間 $\{\boldsymbol{0}\}$ に対しても存在するように，この様な定義を採用する。

例 1.11 の (1) の $\mathrm{Ker}(T_A)$ と $\mathrm{Im}(T_A)$ について考える。

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(T_A) &= \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; z, w \in \boldsymbol{K} \right\} \\ \mathrm{Im}(T_A) &= \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -X+2Y \\ -2X+3Y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; X, Y \in \boldsymbol{K} \right\}\end{aligned}$$

であった。$\mathrm{Ker}(T_A)$ の元 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w \\ -3w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるので，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ に対し $\boldsymbol{x} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。逆に任意の $\boldsymbol{x} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ に対し $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ なので,

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

$\mathrm{Im}(T_A)$ の元 $\boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -X+2Y \\ -2X+3Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ -X \\ -2X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 2Y \\ 3Y \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と書けるので，任意のベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T_A)$ に対し $\boldsymbol{y} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。逆に任意の $\boldsymbol{y} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ に対し $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T_A)$ なので

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。

演習問題 1.11 $\langle S \rangle$ は $\langle S \rangle = \{\, \boldsymbol{x} \in V \mid\ \exists \boldsymbol{v}_1, \ldots, v_n \in S, \exists c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{K}, \boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{v}_a + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n \,\}$ と書き表される。

定義 1.13 V をベクトル空間とし，U_1, U_2 を V の部分空間とする。

$$U_1 + U_2 = \{\, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \mid\ \boldsymbol{u}_1 \in V_1, \boldsymbol{u}_2 \in U_2 \,\}$$

を U_1 と U_2 の**和空間**という。$U_1 \cap U_2$ を**共通部分**という。和空間，共通部分は V の部分空間となる (演習問題 1.12)。

$U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ となるとき $U_1 + U_2$ を U_1 と U_2 の**直和** (*direct sum*) といい $U_1 \oplus U_2$ と書く。

演習問題 1.12 V の部分空間 U_1, U_2 に対し $U_1 + U_2$ 及び $U_1 \cap U_2$ が V の部分空間になる事を示せ。

演習問題 1.13 V の部分空間 U_1, U_2, U_3 が $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ かつ $(U_1 \oplus U_2) \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$ を満たすとき，$U_2 \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$ かつ $U_1 \cap (U_2 \oplus U_3) = \{\mathbf{0}\}$ が成立し，$(U_1 \oplus U_2) \oplus U_3 = U_1 \oplus (U_2 \oplus U_3)$ となる。よってこれを $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ と書く。

1.5 1 次独立，基と次元

定義 1.14 線型空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ が次の性質をもつとき **1 次独立** (*linearly independent*) であるという：即ち「スカラー $c_1, \ldots, c_s$ に対し

$$c_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_s \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{o}$$

が成立していれば $c_1 = \cdots = c_s = 0$」

V の部分集合 S が次の性質を持つとき**1次独立系**と呼ぶ：S の任意の有限部分集合 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は1次独立である。

定義 1.15 一般の線型空間 V に対し次の性質をもつ V の部分集合 S を**基底** (*base*) と呼ぶ。

(1) S は V を生成する。即ち $V = \langle\, S \,\rangle$ が成立する。

(2) S は 1 次独立系である。

例 1.16

(1) 数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ についていえば基本ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$S = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は基底である。

(2) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ は $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$ の基底である。

(3) $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。$S = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ は $M(2\,; \boldsymbol{K})$ の基底である。

(4) (m, n) 行列で (i, j) 成分のみ 1 で他の成分は 0 である行列を E_{ij} と書く。$S = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}\}$ は $M(m, n\,; \boldsymbol{K})$ の基底である。

(5) $S = \langle\, 1, x, \ldots, x^n, \ldots \,\rangle$ は $\boldsymbol{K}[x]$ の基底である。$S' = \langle\, 1, x, \ldots, x^n \,\rangle$ は $\boldsymbol{K}_n[x]$ の基底である。

(6) X が無限集合の場合 $F(X\,; \boldsymbol{R})$ の基底を具体的に求めるのは難しい。X が有限集合のときは次の様に基底を具体的に決定する事ができる。$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とするとき，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し $f_i \in F(X\,; \boldsymbol{R})$ を

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & (x = x_i) \\ 0 & (x \neq x_i) \end{cases}$$

で定義すると，$S = \{f_1, \ldots, f_n\}$ は基底をなす。X が無限集合のとき有限集合の場合と同様に $a \in X$ に対し $f_a \in F(X\,; \boldsymbol{R})$ を

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & (x = a) \\ 0 & (x \neq a) \end{cases}$$

のように定義すると，$S = \{\, f_a \mid\ a \in X \,\}$ は $F(X\,; \boldsymbol{R})$ の 1 次独立系ではあるが，基底ではない。

(7) $F(X\,; \boldsymbol{R})$ と同様に $C^n(X\,; \boldsymbol{R})$, $C^n(X\,; \boldsymbol{R}\,; P[T])$ に関して色々な 1 次独立系の存在は分かるが，基底を具体的に求めるのは難しい。$X = \boldsymbol{R}$ とし，ここでは $V = C^\infty(\boldsymbol{R}, ; \boldsymbol{R}\,; P[2\pi])$ を考えよう。$f_n(x) = \sin nx$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $g_n(x) = \cos nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする。$S = \{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots, g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ とおく。S は 1 次独立系である。証明は工業数学 I 参考の事。

(8) 任意の自然数 k に対し $\boldsymbol{a}^{(k)} = \{a_i^{(k)}\}$ を $a_i^{(k)} = \delta_{ki}$ で定義する。ただし δ_{ki} はクロネッカーのデルタとする。$S = \{\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \ldots\}$ とすると S は 1 次独立系であるが，$\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ の基底ではない。

$\boldsymbol{x} = \{x_i\}$ を $x_1 = 1, x_2 = 0, x_{i+2} = x_{i+1} + x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を満たす x_i で定まる数列とすると $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Fib}$ である。$\boldsymbol{y} = \{y_i\}$ を $y_1 = 0, y_2 = 1, y_{i+2} = y_{i+1} + y_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を満たす y_i で定まる数列とすると $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Fib}$ である。このとき $S = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ は Fib の基底である。

(9) 例 1.3 の (15) の線型微分方程式

$$L_0 : y'' - y' - 2y = 0$$

の解空間を $\mathrm{De}(L_0)$ とする。$y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{2x}$ とおくと，$y_1, y_2 \in \mathrm{De}(L_0)$ であり，$S = \{y_1, y_2\}$ は $\mathrm{De}(L_0)$ の基底になる。

解空間の基底になる関数系を基本解と呼ぶが，線型微分方程式は基本解を求めると一般解は分かる。

次元を定義するためには次の定理が必要になる。

定理 1.17 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の 2 つの基底とする。任意の V のベクトル $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ について $m > n$ なら $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ は 1 次独立でない

証明は線形解析で扱っているので省略する。定理 1.17 より次の定義が許される。

定義 1.18 $\boldsymbol{K}$ 上の線型空間 V が有限個のベクトルからなる基底を持たないとき**無限次元** (*infinite dimensional*) であるという。V が n 個のベクトルからなる基底

$$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

を持つ時この線型空間 V の ($\boldsymbol{K}$ 上の) **次元** (*dimension*) は n であるという。この次元を $\dim_{\boldsymbol{K}} V$ と表す。$\boldsymbol{K}$ が明らかな時は省略して $\dim V$ とも書く。またこの時線型空間 V は**有限次元** (*finite dimensional*) であるという。

例 1.16 でいうと，n 項数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ は $\dim_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{K}^n = n$ である。$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x + y + z = 0 \right\}$ に対しては $\dim V = 2$ である。$\dim M(m, n\,; \boldsymbol{K}) = mn$, $\dim \boldsymbol{K}[x] = \infty$, $\dim \boldsymbol{K}_n[x] = n + 1$ が成立する。X が有限集合のとき X の個数を n とすると，$\dim F(X\,; \boldsymbol{R}) = n$，$X$ が無限集合のときは $\dim F(X\,; \boldsymbol{R}) = \infty$ である。以下 $\dim \mathrm{Fib} = 2$,$\dim \mathrm{De}(L_0) = 2$ を除いて他の例は無限次元である。

命題 1.19 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間で $\dim V = n$ とする。このとき $\Phi : V \to \boldsymbol{K}^n$ で Φ が同型写像になるものが存在する。即ち V が n 次元である必要十分条件は $\boldsymbol{K}^n$ と同型な事である。

証明 V は n 次元であるとする。V の基底 $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を 1 つ固定する。このとき V から $\boldsymbol{K}^n$ への写像 Φ_S を次で定義する；任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ となるスカラーが一意的に定まる。このとき

$$\Phi_S(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と定義する。これが同型写像になるのは演習問題とする。 ∎

演習問題 1.14 Φ_S が同型写像である事を証明せよ。