線型代数続論要綱 #4

2004–6–8 河野

演習問題 1.15

(1) W が線型空間 V の部分空間である事の定義を述べよ。

(2) $V = \boldsymbol{R}^4$, $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \right\}$ とするとき W が V の部分空間である事を示せ。

(3) S が W の基底である事の定義を述べよ。

(4) W の基底 S を自分で選び，それが実際に基底である事を示せ。

演習問題 1.16

(1) $V = C^\infty(\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{R})$, $W = \{\, y \in V \mid \ y'' - 4y' + 5y = 0 \}$ とするとき W が V の部分空間である事を示せ。

(2) W の基底 S を自分で選び，それが実際に基底である事を示せ。ただし次の定理は使用してよい。

定理 $y'' + ay' + by = 0$ の解関数は初期値 $y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ を 1 つ与えるとただ 1 つ存在する。

1.6 線型写像の行列表示

この節では線型空間はすべて有限次元と仮定する。次の命題から話を始めよう。

命題 1.20 $T : \boldsymbol{K}^n \longrightarrow \boldsymbol{K}^m$ を線型写像とする。このとき (m, n) 行列 $A \in M(m, n\,; \boldsymbol{K})$ が存在して，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立する。

証明 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ を基本ベクトルとする。$i = 1, \ldots, n$ に対し $\boldsymbol{a}_i = T(\boldsymbol{e}_i)$ とおき，$A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ とおく。任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ なので

$$T(\boldsymbol{x}) = x_1T(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_nT(\boldsymbol{e}_n) = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

となるが,

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

なので $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立している。 $\blacksquare$

一般の線型空間の場合命題 1.20 の様な事は成立しない。しかし基底をそれぞれ指定すれば行列を対応させる事ができる。$T : V \longrightarrow U$ を線型写像とする。$\dim V = n, \dim U = m$ とする。命題 1.19 を思い出そう。V の基底 $S = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を 1 つ固定すると，線型写像 (同型写像でもある) $\Phi_S : V \longrightarrow \boldsymbol{K}^n$ が定まった。U の基底 $R = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ を固定すると同様に線型写像 $\Phi_R : U \longrightarrow \boldsymbol{K}^m$ が定まる。合成写像 $\Phi_R \circ T \circ \Phi_S^{-1}$ は $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像なので命題 1.20 より任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $\Phi_R \circ T \circ \Phi_S^{-1}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A が存在する。この A を T の基底 S と基底 R に関する**表現行列**という。

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_S"'] & U \arrow[d, "\Phi_R"] \\
\boldsymbol{K}^n \arrow[r, "A"] & \boldsymbol{K}^m
\end{tikzcd}
$$

T が V から V への写像のときは基底として $S = R$ と同じものをとる場合が多い。表現行列は基底を取り換えると別のものになるが，それらの間には次の関係がある。

命題 1.21 T を V から U への線型写像とする。S, S' を V の基底，R, R' を U の基底とする。A を T の基底 S と基底 R に関する表現行列，B を T の基底 S' と基底 R' に関する表現行列とする。このとき n 次の正則行列 P と m 次の正則行列 Q が存在して $AP = QB$ となる。

T が V から V への線型写像のとき，S, S' を V の基底とする。A を T の基底 S と基底 S に関する表現行列 (この場合単に基底 S に関する表現行列とも呼ぶ)，B を T の基底 S' と基底 S' に関する表現行列 (この場合単に基底 S' に関する表現行列とも呼ぶ) とする。このとき n 次の正則行列 P が存在して $A = PBP^{-1}$ となる。

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{K}^n \arrow[r, "B"] & \boldsymbol{K}^m \\
V \arrow[r, "T"] \arrow[u, "\Phi_{S'}"] \arrow[d, "\Phi_S"'] & U \arrow[u, "\Phi_{R'}"'] \arrow[d, "\Phi_R"] \\
\boldsymbol{K}^n \arrow[r, "A"] & \boldsymbol{K}^m
\end{tikzcd}
$$

証明　$\Phi_{S'}$ は同型写像なので，$\Phi_{S'}^{-1}$ が存在する。$\Phi_{R'} \circ T \circ \Phi_{S'}^{-1}$ は $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像であるから，V の基底 S' と U の基底 R' に対し行列 B が存在して，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $\Phi_{R'} \circ T \circ \Phi_{S'}^{-1}(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ が成立する。

$\Phi_S \circ \Phi_{S'}^{-1}$ は $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^n$ への線型写像なので，行列 P が存在して，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $\Phi_S \circ \Phi_{S'}^{-1}(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x}$ が成立する。また $\Phi_S \circ \Phi_{S'}^{-1}$ は同型写像なので，P は正則行列である。

$\Phi_R, \Phi_{R'}$ に関しても同様に考えると，行列 Q が存在して任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m$ に対し $\Phi_R \circ \Phi_{R'}^{-1}(\boldsymbol{y}) = Q\boldsymbol{y}$ が成立し，また Q は正則行列である。

以上により任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $QB\boldsymbol{x} = (\Phi_R\Phi_{R'}^{-1})(\Phi_{R'}T\Phi_{S'}^{-1})(\boldsymbol{x}) = \Phi_R T\Phi_{S'}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \Phi_R T\Phi_S^{-1} \circ \Phi_S\Phi_{S'}^{-1}(\boldsymbol{x}) = AP\boldsymbol{x}$ となるので，$AP = QB$ となる。

V から V への写像のときは同じ基底を選ぶと $AP = PB$ となるので $A = PBP^{-1}$ となる。∎

例 1.22

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{K}^2$ から $\boldsymbol{K}^2$ への写像 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおき，$S_0 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ とする。S_0 に関する T の表現行列は A である。これは余り面白くない。T にとって都合のよい別の基底を取ろう。$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とし，$S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ とする。

最初に Φ_S を求める。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ となる a_1, a_2 を求めると，$a_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, a_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$ となる。逆に $\dfrac{x_1 + x_2}{2}\boldsymbol{v}_1 + \dfrac{x_1 - x_2}{2}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}$ となる。よって $\Phi_S(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \dfrac{x_1 - x_2}{2} \end{pmatrix}$ となる。このとき $\Phi_S(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{e}_1, \Phi_S(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{e}_2$ が成立している。また $T(\boldsymbol{v}_1) = 3\boldsymbol{v}_1, T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_2$ が成立している。T の基底 S に関する表現行列を B とすると任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\Phi_S T\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ が成立している。特に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ とおくと，$\Phi_S T\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_1) = \Phi_S T(\boldsymbol{v}_1) = \Phi_S(3\boldsymbol{v}_1) = 3\varphi_S(\boldsymbol{v}_1) = 3\boldsymbol{e}_1$ となるので $B\boldsymbol{e}_1 = 3\boldsymbol{e}_1$ となる。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2$ とおくと，$\Phi_S T\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_2) = \Phi_S T(\boldsymbol{v}_2) = \Phi_S(\boldsymbol{v}_2) = \varphi_S(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{e}_2$ となるので $B\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$ となる。よって $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

線型写像 T を考えるときは通常の座標系 $S_0 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ よりも，$S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ の方が見やすい事が分かる。即ちこの座標系において T は $\boldsymbol{v}_1$ 方向に 3 倍し，$\boldsymbol{v}_2$ 方向には何も変化させない写像になっている。ここでは $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は天下りに与えたが，固有値ベクトルの理論から出てきている。これはまた後で見よう。

(2) $V = \{\, y \mid y'' - y' - 2y = 0 \,\}$ とし，V から V への写像 D を関数 y に対しその導関数を対応させる写像とする。ここで次の定理を証明抜きに認める事にしよう。

定理 $y'' + ay' + by = 0$ の解関数は初期値 $y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ を与えたとき，唯 1 つ存在する

y_1 を $y_1(0)=1, y_1'(0)=0$ となる V の元，y_2 を $y_2(0)=0, y_2'(0)=1$ となる V の元とすると，$S=\{y_1,y_2\}$ は V の基底となる。$\Phi_S(y_1)=\boldsymbol{e}_1, \Phi_S(y_2)=\boldsymbol{e}_2$ となっている。$D(y_1)=ay_1+by_2$ とおくと，$y_1''=y_1'+2y_1$ に注意すると，$a=0, b=2$ を得る。逆に $2y_2=y_1'$ となっている。ここで次の定理**??** を証明に使用した。同様に $D(y_2)=y_1+y_2$ である事が分かる。S に関する表現行列を A とすると $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ である事が分かる。

$z_1(x)=e^{-x}$ とおくと $z_1'(x)=-e^{-x}, z_1''(x)=e^{-x}$ なので，$z_1''-z_1'-2z_1=0$ を満たす。よって $z_1 \in V$ となる。また $z_2(x)=e^{2x}$ とおくと $z_2'(x)=2e^{2x}, z_2''(x)=4e^{2x}$ なので，$z_2''-z_2'-2z_2=0$ を満たす。よって $z_2 \in V$ になる。

$S'=\{z_1,z_2\}$ は V の基底となる。$D(z_1)=-z_1, D(z_2)=2z_2$ なので，S' に関する表現行列を B とすると，$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる。

(3) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 1 つ固定する。$V=M(2;\boldsymbol{K})$ からそれ自身への写像 T を $T(X)=AX$ で定義する。$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ を例 1.16 の (3) のものとし，$S=\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ とする。$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，$\Phi_S(E_{11})=\boldsymbol{e}_1, \Phi_S(E_{12})=\boldsymbol{e}_2, \Phi_S(E_{21})=\boldsymbol{e}_3, \Phi_S(E_{22})=\boldsymbol{e}_4$ となっている。基底 S に関する T の表現行列を B とする。$T(E_{11})=AE_{11}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}=aE_{11}+cE_{21}$ となるので，$B\boldsymbol{e}_1=\Phi_S T\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_1)=\Phi_S T(E_{11})=\Phi_S(aE_{11}+cE_{21})=a\Phi_S(E_{11})+c\Phi_S(E_{21})=a\boldsymbol{e}_1+c\boldsymbol{e}_3$ となる。よって B の 1 列目は $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ となっている事が分かる。$T(E_{12})=AE_{12}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}=aE_{12}+cE_{22}$ となるので，$B\boldsymbol{e}_2=\Phi_S T\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_2)=\Phi_S T(E_{12})=\Phi_S(aE_{12}+cE_{22})=a\Phi_S(E_{12})+c\Phi_S(E_{22})=a\boldsymbol{e}_2+c\boldsymbol{e}_4$ となる。よって B の 2 列目は $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ となっている事が分かる。$T(E_{21})=AE_{21}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}=bE_{11}+dE_{21}$ となるので，$B\boldsymbol{e}_3=\Phi_S T\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_3)=\Phi_S T(E_{21})=\Phi_S(bE_{11}+dE_{21})=b\Phi_S(E_{11})+d\Phi_S(E_{21})=b\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_3$ となる。よって B の 3 列目は $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$ となっている事が分かる。$T(E_{22})=AE_{22}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=bE_{12}+dE_{22}$ となるので，$B\boldsymbol{e}_4=$

$\Phi_S T\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_4) = \Phi_S T(E_{22}) = \Phi_S(bE_{12}+dE_{22}) = b\Phi_S(E_{12})+d\Phi_S(E_{22}) = b\boldsymbol{e}_2+d\boldsymbol{e}_4$ となる。よって B の 4 列目は $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$ となっている事が分かる。以上により $B = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$ が分かる。

次に $T'(X) = XA$ で定義される線型写像の S に関する表現行列 C を求めてみよう。$T'(E_{11}) = E_{11}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aE_{11}+bE_{12}$ となるので，$C\boldsymbol{e}_1 = \Phi_S T'\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_1) = \Phi_S T'(E_{11}) = \Phi_S(aE_{11}+bE_{12}) = a\Phi_S(E_{11})+b\Phi_S(E_{12}) = a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$ となる。よって C の 1 列目は $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となっている事が分かる。$T'(E_{12}) = E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = cE_{11}+dE_{12}$ となるので，$C\boldsymbol{e}_2 = \Phi_S T'\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_2) = \Phi_S T'(E_{12}) = \Phi_S(cE_{11}+dE_{12}) = c\Phi_S(E_{11})+d\Phi_S(E_{12}) = c\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_2$ となる。よって C の 2 列目は $\begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となっている事が分かる。$T'(E_{21}) = E_{21}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = aE_{21}+bE_{22}$ となるので，$C\boldsymbol{e}_3 = \Phi_S T'\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_3) = \Phi_S T'(E_{21}) = \Phi_S(aE_{21}+bE_{22}) = a\Phi_S(E_{21})+b\Phi_S(E_{22}) = a\boldsymbol{e}_3+b\boldsymbol{e}_4$ となる。よって C の 3 列目は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ となっている事が分かる。$T'(E_{22}) = E_{22}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = cE_{21}+dE_{22}$ となるので，$C\boldsymbol{e}_4 = \Phi_S T'\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{e}_4) = \Phi_S T'(E_{22}) = \Phi_S(cE_{21}+dE_{22}) = c\Phi_S(E_{21})+d\Phi_S(E_{22}) = c\boldsymbol{e}_3+d\boldsymbol{e}_4$ となる。よって C の 4 列目は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}$ となっている事が分かる。以上により $C = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$ が分かる。

演習問題 1.17　例 1.16 (8) の Fib の基底 $S = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ に関するシフト S の表現行列を求めよ。

演習問題 1.18　例 1.22 の (3) と同様な事を 3 次行列について考えよ。即ち A を 3 次行列とする。$\boldsymbol{K}^3$ から $\boldsymbol{K}^3$ への写像 T, T' を $T(X) = AX$,$T'(X) = XA$ で定義する。E_{pq} を (p, q) 成分のみ 1 で，他の成分は 0 である行列とする。$S = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{33}\}$ とするとき，T 及び T' の S に関する表現行列を求めよ。