線型代数続論要綱 #5

2004–6–29　　河野

1.7 固有値と固有空間

線形解析で行列の固有値，固有ベクトルを学んだが，この講義で一般化した線型写像にたいしてもその様な概念が定義される。

定義 1.23 V を $\boldsymbol{K}$ 上の線型空間，T を V から V への線型写像とする。スカラー λ とゼロでないベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が存在して $T(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすとき λ を T の**固有値** (*eigenvalue*) といい，$\boldsymbol{x}$ を T の λ に属する**固有ベクトル** (*eigenvector*) という。

λ が固有値のとき

$$E(\lambda) = \{\, \boldsymbol{x} \in V \mid\ T(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x} \,\}$$

とする。即ち T の λ に属する固有ベクトル全体とゼロベクトルの和集合とする。$E(\lambda)$ は V の部分空間になるが (演習問題 1.19) これを T の λ に属する**固有空間** (*eigenspace*) という。

演習問題 1.19 　$E(\lambda)$ が V の部分空間になる事を示せ。

命題 1.24 T を線型空間 V から V への線型写像とし，λ_1, λ_2 を T の相異なる固有値とする。そのとき $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{\boldsymbol{0}\}$ である。即ち $E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \subseteq V$ となっている。

証明 　$\{\boldsymbol{0}\} \subseteq E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$ は明らかなので $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) \subseteq \{\boldsymbol{0}\}$ を証明する。任意の $\boldsymbol{x} \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$ に対し $\boldsymbol{x} \in E(\lambda_1)$ なので $T(\boldsymbol{x}) = \lambda_1\boldsymbol{x}$ となっている。同様に $T(\boldsymbol{x}) = \lambda_2\boldsymbol{x}$ が成立している。よって $(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x} - \lambda_2\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ であり，$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ なので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。 ▮

例 1.25 　(1) A を n 次行列とする。$V = \boldsymbol{K}^n$ とし V から V への線型写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。このとき T_A の固有値・固有ベクトルは線形解析で学んだ行列 A の固有値・固有ベクトルである。T_A の固有値は A の固有方程式の解なので，高々n 個しか存在しない。

(2) $V = C^\infty(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ を $\boldsymbol{C}$ 上の線型空間と考える。V から V への線型写像 D を関数に対しその導関数を対応させる写像とする。このとき任意の $\lambda \in \boldsymbol{C}$ に対し $y(x) = e^{\lambda x}$ は D の λ に属する固有ベクトルとなる。即ち任意の $\lambda \in \boldsymbol{C}$ に対し λ は D の固有値である。

$U = \{\, y \in V \mid\ y$ は周期 2πの周期関数$\,\}$ を $\boldsymbol{C}$ 上の線型空間と見る。D は U から U への線型写像でもある。D を U に制限した写像を D_1 と書く事にする。λ を D_1 の固有値とする。固有関数が存在したとすると $y(x) = e^{\lambda x}$ という形をしているものを固有関数として選べる。$y \in U$ となるためには $y(0) = y(2\pi)$ である事が必要である。よって $e^{\lambda 2\pi} = e^0 = 1$ を満たす必要があるので，λ は in という形をしている必要がある。ここで i は虚数単位，n は任意の整数である。この場合固有値は無限個存在するが，離散的 (飛び飛び) に存在している事が分かる。

今の議論を実数値関数に置き換えると状況は大きく変化する。$V_1 = C^\infty(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ を $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間と考える。D を導関数を対応させる写像とすると，任意の実数 λ に対し λ は D の固

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

有値になる。しかし $U_1 = \{y \in V_1 \mid\ y$ は周期 2πの周期関数$\}$ と定義し，D を U_1 に制限したものを D_1 とする。このとき D_1 の固有値は 0 のみである。即ち 0 以外の λ に対応する固有関数は U_1 の中には存在しない。

次に $W = \{y \in V \mid\ y'' + ay' + b = 0\}$ を考える。ただし a, b は複素数とする。この空間は前の例と異なり有限次元 (2 次元) である。多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + b$ で定義し，方程式 $f(x) = 0$ を考える。この方程式 $f(x) = 0$ の解 λ に対し $y = e^{\lambda x}$ は D の固有関数となっていて，$y \in W$ となる。即ち $f(x) = 0$ の解は D の固有値になる。

$f(x) = 0$ が異なる 2 つの解 λ_1, λ_2 を持つとき，λ_1, λ_2 は D の固有値であり，$W = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2)$ となっている。また $f(x) = 0$ が重解を持つとき，その解を λ とすると，$E(\lambda)$ は 1 次元なので，$W \neq E(\lambda)$ である。

$W_1 = \{y \in V_1 \mid\ y'' + ay' + b = 0\}$ を考える。ただし a, b は実数とする。多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + b$ で定義し，方程式 $f(x) = 0$ を考える。この方程式 $f(x) = 0$ が実数解 λ を持つときは $y = e^{\lambda x}$ は D の固有関数となっていて，$y \in W$ となる。即ち $f(x) = 0$ の実数解は D の固有値になる。複素数の場合と異なり 3 つの場合に分かれる。

$f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解 λ_1, λ_2 を持つときは複素数の場合と同様に，λ_1, λ_2 は D の固有値であり，$W = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2)$ となっている。また $f(x) = 0$ が重解を持つとき, その解 λ は実数解であり，$E(\lambda)$ は 1 次元なので，$W \neq E(\lambda)$ である。

$f(x) = 0$ が実数解を持たないとき，固有値は存在しない。

(3) $V = \mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ とする。S をシフトとする。このとき任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し λ は固有値となる。何故なら対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{a}_\lambda = \{a_i\}$ (ただし $a_i = \lambda^{i-1}$) が存在するからである。

S を Fib に制限した写像を S' とする。$\boldsymbol{a}_\lambda$ の形のベクトルで Fib に属するものは $\lambda^2 = \lambda + 1$ を満たしている必要がある。即ち S' の固有値は $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ の 2 つであり，

$$\mathrm{Fib} = E\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \oplus E\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

となっている。

線型写像の固有値は行列の固有値大きく異なっているが，線型空間が有限次元の場合はほぼ同様である。その根拠として次の事実がある。

命題 1.26 V を $\boldsymbol{K}$ 上の線型空間で有限次元のものとする。T を V から V への線型写像とする。V の基底 $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を 1 つ固定する。A を T の基底 S に関する表現行列とする。このとき T の固有値は A の固有値であり，逆も成立する。また $\boldsymbol{x}$ が T の λ に属する固有ベクトルである事と，$\Phi_S(\boldsymbol{x})$ が A の λ に属する固有ベクトルである事は同値である。

証明　λ を T の固有値とし $\boldsymbol{x}$ を λ に属する T の固有ベクトルとする。このとき $A(\Phi_S(\boldsymbol{x})) = \Phi_S(T(\boldsymbol{x})) = \Phi_S(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\Phi_S(\boldsymbol{x})$ が成立する。Φ_S は同型写像なので，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ より $\Phi_S(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ である。よって $\Phi_S(\boldsymbol{x})$ は λ に属する A の固有ベクトルである。λ は A の固有値である。逆に $\boldsymbol{y}$ を λ に属する A 固有ベクトルとする。$\boldsymbol{x} = \Phi_S^{-1}(\boldsymbol{y})$ とおくと $T(\boldsymbol{x}) = T(\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{y})) = \Phi_S^{-1}(A\boldsymbol{y}) = \Phi_S^{-1}(\lambda\boldsymbol{y}) = \lambda\Phi_S^{-1}(\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x}$ となり，$\boldsymbol{x}$ は T の λ に属する固有ベクトルである。よって λ は T の固有値である。 ∎

有限次元線型空間 V から V への線型写像 T がその表現行列が対角行列になるような基底を持つとき**対角化可能**という。対角化可能の条件として次が成り立つ。

命題 1.27 T の相異なるすべての固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ とする。T が対角化可能である必要十分条件は

$$V = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$$

である。

証明 T は対角化可能であるとする。ある基底 $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在して，S に関する表現行列が対角行列 A になっている。対角成分を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とすると，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は α_i に属する A の固有ベクトルである。このとき $\Phi_S(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{e}_i$ なので，$\boldsymbol{v}_i$ は α_i に属する T の固有ベクトルである。$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に中で互いに異なるものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ と置き直すと $V = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$ が分かる。

逆に $V = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$ とすると，固有ベクトルからなる基底 S が存在する。この基底に関する表現行列は対角行列になっている。 ∎