線型代数続論要綱 #6　　2004–7–6　　河野

2　内積を持つ線型空間

高校時代に学んだ平面のベクトル及び空間のベクトルには内積及び長さというものが定義されていた。この章では線型空間に対し同様なものを考える。

2.1　数ベクトル空間の内積

平面のベクトル及び空間のベクトルの内積及び長さを復習しよう。

定義 2.1 平面のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対しその**内積** (*inner product*) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

で定義する。またベクトル $\boldsymbol{x}$ の**長さ**を

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

で定義する。

空間のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対しその**内積** (*inner product*) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

で定義する。またベクトル $\boldsymbol{x}$ の**長さ**を

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

で定義する。

内積を別の形で表現しておこう。ベクトル $\boldsymbol{x}$ は平面のベクトルであるか，空間のベクトルであるかにしたがって，$(2, 1)$ 行列または $(3, 1)$ 行列と見る事ができる。このとき転置行列 $\boldsymbol{x}^T$ を考える事ができる。このとき

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$$

となっている。

命題 2.2 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 等を平面または空間のベクトル，a を実数とする。このとき次が成立する。

(1) [**正値性**]　任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ となる。また $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る。

(2) [**対称性**]　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成立する。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(3) [**線型性**]

1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 a に対し $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

(4) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とする。ただし $\boldsymbol{x}$ または $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{0}$ のときは $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ と定義する。このとき $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$ が成立する。

よって $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交する必要十分条件は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である。

n 項数ベクトルに対し内積を定義する。

定義 2.3 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$ に対しその**内積** (*inner product*) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

で定義する。別の表現で書くと

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$$

となる。またベクトル $\boldsymbol{x}$ の**長さ**を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$$

で定義する。

命題 2.2 と同じ様に次が成立する。

命題 2.4 (1) [**正値性**] 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ となる。また $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る。

(2) [**対称性**] 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成立する。

(3) [**線型性**]

1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ に対し $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

命題 2.2 の (4) に対応する n 項数ベクトルの命題を考えたい。n が 4 以上の場合，n 項数ベクトル同士には角度というものがあらかじめ定義されていない。そこで角度というものを定義したい。そのために次の定理を必要とする。

定理 2.5 [**Schwarz(シュワルツ) の不等式**] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$$

が成立する。

証明　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とする。X を実数を動く変数と考え，$(x_1 X + y_1)^2$ を考えると，$(x_1 X + y_1)^2 \geqq 0$ が成立している。各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に関しても同様に $(x_i X + y_i)^2 \geqq 0$ が成立している。これを $i = 1, \ldots, n$ まで足合わせると，

$$(x_1 X + y_1)^2 + \cdots + (x_n X + y_n)^2 \geqq 0$$

が得られる。これを展開すると

$$(x_1^2 + \cdots + x_n) X^2 + 2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) X + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) \geqq 0$$

となる。任意の実数 X に対し上式が成立しているので，2 次方程式 $(x_1^2 + \cdots + x_n) X^2 + 2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) X + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = 0$ の判別式は 0 以下である。これを書き下すと定理の式が得られる。 ▮

演習問題 2.1　Schwarz の不等式から次の 3 角不等式を導け; 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

が成立する。

この定理を用いて 2 つのベクトルの間の角度を定義しよう。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ とする。ただし，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ としておく。このとき Schwarz の不等式より

$$-1 \leqq \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|} \leqq 1$$

が成立している。このとき $0 \leqq \theta \leqq \pi$ となる θ で

$$\cos \theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}$$

となるものが唯 1 つ存在する。このとき θ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角と定義する。

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のときは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{2}$ と定義する。この様に定義すると命題 2.2 の (4) は $\boldsymbol{R}^n$ においても成立する事が分かる。

n 項数ベクトル空間では複素数を成分とするベクトルも考えた。複素ベクトルに関する内積は実ベクトルの内積のすべての性質を持つ様に構成することはできないが，似た性質を持つ様には定義できる。

複素数 $z \in \boldsymbol{C}$ に対し $\overline{z}$ を z の**共役複素数**とする。即ち $z = x + iy$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ とするとき，$\overline{z} = x - iy$ と定義する。また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^n$ に対し $\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$ と定義する。

定義 2.6 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^n$ に対しその**内積** (inner product) を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}$$

で定義する。別の表現で書くと

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \overline{\boldsymbol{y}}$$

となる。またベクトルの**長さ**を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

で定義する。

命題 2.4 と一部異なるがほぼ同様の命題が成立する。

命題 2.7 (1) [**正値性**] 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ となる。また $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る。

(2) [**共役対称性**] 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$ が成立する。

(3) [**線型性**]

1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{C}^n$ に対し $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^n$ と任意の複素数 $a \in \boldsymbol{C}$ に対し $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

$\boldsymbol{R}^n$ の場合，内積の性質の「対称性」及び「線型性」から第 2 成分に関する線型性が従う。即ち次が成立する。

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ に対し $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

しかし $\boldsymbol{C}^n$ の場合「共役線型性」なので第 2 成分に関しては「線型性」ではなく次の「共役線型性」を持つ。即ち次が成立する。

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{C}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^n$ と任意の複素数 $a \in \boldsymbol{C}$ に対し $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) = \overline{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

複素ベクトルに関しても Schwarz の不等式は成立する。しかし $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は一般に複素数になるので，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角は定義できない。しかし $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ のとき**直交する**と定義する事はできる。