線型代数続論要綱 #7

2004–7–13　　河野

2.2　線型空間の内積

一般の線型空間に対し内積を定義しよう。

定義 2.8 $\boldsymbol{L}$ を $\boldsymbol{K}$ 上の線型空間とする。$\boldsymbol{L}$ の各元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{K}$ の元 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が対応していて，次の条件を満たすとき $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を L の**内積** (*inner product*) といい，内積が定義されている線型空間 $\boldsymbol{L}$ を**計量線型空間**または省略して**計量空間**という。

$\boldsymbol{L}$ の各元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{K}$ の元 α に対し次が成立する。ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す。

(1) (**正値性**) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ になるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限る。

(2) (**共役対称性**) $\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(3) (**線型性**)

1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

2) $(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

実数 x に対しその共役複素数は自分自身，即ち $\overline{x} = x$ となるので，$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}$ の場合 (2) は**対称性**を意味する。$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ か $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ かを確定させたい場合は，$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合**実計量線型空間**，$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合**複素計量線型空間**という。

$\boldsymbol{L}$ の元 $\boldsymbol{x}$ に対しその**長さ**を $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ で定義する。

幾何的なベクトルに因んで $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となるベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は**直交する**という。

演習問題 2.2　$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}, \alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|$ が成立する事を示せ。

演習問題 2.3　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}, \alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し次 (共役線型性) が成立する事を示せ。

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$

(2) $(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

例 2.9 今まで出てきた線型空間のなかで計量線型空間となるものを見てみよう。

(1) (**数ベクトル空間**) 前節で学んだように $\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{C}^n$ には内積が定義され $\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{C}^n$ は計量線型空間となる。

(2) (**部分空間**) $\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{C}^n$ の部分空間を V とする。$\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{C}^n$ に内積が定義されているので，それを V に制限したものは V の内積になっている。この事は $\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{C}^n$ の部分空間に限らず，計量線型空間の部分空間は計量線型空間になる事が分かる。

(3) (**行列**) $\boldsymbol{L} = M(m, n; \boldsymbol{K})$ とする。(m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ に対し $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ とする。また A の転置行列を A^T と書く。このとき $A^* = \overline{A}^T$ と定義する。n 次正方行列 $C = (c_{ij})$ に対しその**トレース** (*trace*) を $\operatorname{Tr} C = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ で定義する。$A, B \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$(A, B) = \operatorname{Tr}(B^* A)$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

と定義すると (A, B) は内積となる (演習問題 2.4)。

(4) (**多項式**) $\boldsymbol{L}$ を実数係数の多項式全体の集合，即ち $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}[x]$ とする。$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$(f(x), g(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$$

と定義すると内積となる (演習問題 2.4)。

(5) (**連続関数**) $\boldsymbol{L} = C^0(X, \boldsymbol{R})$ または $\boldsymbol{L} = C^0(X, \boldsymbol{C})$ とする。ここで X は閉区間 $X = [a, b]$ とする。$f, g \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義すると内積になる (演習問題 2.4)。

X が有界でない場合はこのままの議論はできない。例えば $X = \boldsymbol{R}$ とすると，積分が収束するとは限らないからである。そこで少し修正する。ここでは値が複素数の場合を考察する (実数の場合もほとんど同様にできる)。$\boldsymbol{L} = \left\{ f \in C^0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx < \infty \right\}$ とする。即ち絶対値の 2 乗の広義積分が収束する関数に制限する。このとき

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義すると内積になる。内積が定義される事，即ち f, g が $\boldsymbol{L}$ に属しているとき $f(x)\overline{g(x)}$ の広義積分が収束する事の証明は解析的事実なので，その事は仮定しよう。これを仮定しても内積である事の証明には幾つか解析的事実の証明が必要になる。解析的事実は証明しなくてもよいが，どの様な事実が必要になるかをチェックしながら証明を試みよ。

(6) (**周期関数**) $\boldsymbol{L}_T = \left\{ f \in C^0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}) \,\middle|\, f \text{ は周期 } T \text{ の周期関数} \right\}$ とする。

$$(f, g) = \int_0^T f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義すると内積になる (演習問題 2.4)。

フーリエ解析を展開するにはこの空間では少し狭い。というのはフーリエ解析では連続でない関数も相手にするからである。しかし連続でない関数まで拡張してしまうと正値性が成立しなくなる。関数の範囲を拡張しても厳密に議論するためには**ほとんど至る所** (*almost everywhere*) という概念を導入する必要がある。

(7) (**数列**) 数列全体の空間に内積を入れることは連続関数の場合と同様に難しい。そこで数列に制限を加える。$\boldsymbol{L} = \left\{ \boldsymbol{a} = \{a_i\} \in \mathrm{Seq}(\boldsymbol{R}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$ とし，$\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\} \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

と定義すると内積となる。証明には連続関数のときと同様の困難性があるが，連続関数の場合ほど難しくない。意欲のあるものは証明を試みよ。

この空間には各項がすべて同じ数である数列は $\mathbf{0}$ 以外は入っていない。そこで少し範囲を広げてこの様な数列も入るようにしよう。その場合内積も変える必要が出てくる。$\boldsymbol{L}' = \left\{ \boldsymbol{a} = \{a_i\} \in \mathrm{Seq}(\boldsymbol{R}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} a_i^2 < \infty \right\}$ とし，$\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\} \in \boldsymbol{L}'$ に対し

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} a_i b_i$$

と定義すると内積となる。

零ベクトル $\mathbf{0}$ は任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = 0$ となる。逆にこの様な性質を持つベクトルは零ベクトルだけである事が分かる。

演習問題 2.4　例 2.9 で述べられた事を証明せよ。

演習問題 2.5　任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ に対し $(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) = 0$ である事を示せ。

命題 2.10 $\boldsymbol{L}$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ が任意のベクトル $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ という性質を持てば $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ である。

証明　任意のベクトルについて成立するので特に $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ とすると $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ である。よって正値性より $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となる。

系 2.11 $\boldsymbol{L}$ のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$ という性質を持てば $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ である。

略証　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ とおいて命題 2.10 を適用すればよい。

定理 2.12 (**シュワルツの不等式**) $\boldsymbol{L}$ を計量線型空間とする。任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$$

が成立する。

証明　$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の場合不等式は成立するので $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ とする。z を複素変数とする関数 $f(z) = (z\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, z\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ を考える。正値性により $f(z) \geqq 0$ となっている。$f(z) = (z\boldsymbol{x}, z\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, z\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = z(\boldsymbol{x}, z\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, z\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = z(\boldsymbol{x}, z\boldsymbol{x}) + z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \overline{z}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 = z\overline{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \overline{z}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 = |z|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \overline{z}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$ となる。ここで $z = -\dfrac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right) &= \frac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} - \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2} - \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &= \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}^2\| - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \end{aligned}$$

となるので $f(z) \geqq 0$ より $\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \geqq 0$ となる。 ∎

系 2.13 (3 **角不等式**) $\boldsymbol{L}$ を計量線型空間とする。任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$