線型代数続論要綱 #8

2004–7–20　　河野

2.3 エルミート行列のユニタリー行列による対角化

講義も今回が最後なので，駆け足になるが表題の問題まで議論をしよう。

定義 2.14 計量線型空間 $\boldsymbol{L}$ の部分集合 S が次の性質を満たすとき**正規直交系** (*orthonormal system*) という:

$$\begin{array}{rcll} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &=& 1 & \boldsymbol{x}\in S \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &=& 0 & \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y} \end{array}$$

例えば $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{C}^n$ とし，$\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ を基本ベクトルとするとき $S=\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ は正規直交系である。

例 2.15 $\boldsymbol{L}=\left\{ f\in C^0(\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}) \,\middle|\, f \text{ は周期 1 の周期関数} \right\}$ とする。$e_k(x)=e^{2\pi kix}$ と定義すると，$S=\{e_0(x),e_{\pm1}(x),\ldots,e_{\pm n}(x),\ldots\}$ は正規直交系である。$f\in\boldsymbol{L}$ に対し内積

$$(f,e_k)=\int_0^{2\pi} f(x)e^{-kix}dx$$

は f の k 番目の複素フーリエ係数と呼ばれる。

$$T=\{1,\cos 2\pi x,\cos 4\pi x,\ldots,\cos 2\pi kx,\ldots,\sin 2\pi x,\sin 4\pi x,\ldots,\sin 2\pi kx,\ldots\}$$

も $\boldsymbol{L}$ の正規直交系である。$f\in\boldsymbol{L}$ に対し内積

$$(f,\cos 2\pi kx)=\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2\pi kx dx \qquad (f,\sin 2\pi kx)=\int_0^{2\pi} f(x)\sin 2\pi kx dx$$

は f のフーリエ係数と呼ばれる。

演習問題 2.6　S が正規直交系のとき 1 次独立系である事を示せ。
演習問題 2.7　$\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{x}_n$ がお互いに直交するとき

$$\|\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_n\|^2=\|\boldsymbol{x}_1\|^2+\cdots\|\boldsymbol{x}_n\|^2$$

が成立する事を示せ。
演習問題 2.8　[**ベッセルの不等式**] $S=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n\}$ を正規直交系とする。任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}$ に対し

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1)|^2+|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_2)|^2+\cdots+|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_n)|^2\leqq\|\boldsymbol{x}\|^2$$

が成立する。等号成立は $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ の線型結合で書けるときに限る。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

命題 2.16 $S=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n,\ldots\}$ を線型空間 $\boldsymbol{L}$ の 1 次独立系とする。次の操作で得られる $T=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n,\ldots\}$ をは正規直交系である:

(1st step) ; $\boldsymbol{x}_1=\dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}$ と置く。

(2nd step) ; $\boldsymbol{x}'_2=\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1$ と置き，$\boldsymbol{x}_1=\dfrac{\boldsymbol{x}'_1}{\|\boldsymbol{x}'_1\|}$ と置く。

(n–th step) ; $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1}$ までは選ばれているものとする。$\boldsymbol{x}'_n=\boldsymbol{v}_n-(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1-\cdots-(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{x}_{n-1})\boldsymbol{x}_{n-1}$ と置き，$\boldsymbol{x}_n=\dfrac{\boldsymbol{x}'_n}{\|\boldsymbol{x}'_n\|}$ と置く。

証明 数学的帰納法で証明する。各 n に対し $\|\boldsymbol{x}_n\|=1$ かつ $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_i)=0\ (i=1,\ldots,n-1)$ を示せばよい。$n=1$ のときは明らか。$n=k$ までの成立を仮定する。$\boldsymbol{x}'_{k+1}=\boldsymbol{v}_{k+1}-(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1-\cdots-(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{x}_k$ なので $i<k+1$ に対して $(\boldsymbol{x}'_{k+1},\boldsymbol{x}_i)=(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_i)-(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_i)-\cdots-(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i)-\cdots-(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_i)$ $j\neq i$ となる j に関しては $(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_i)=0$ なので $(\boldsymbol{x}'_{k+1},\boldsymbol{x}_i)=(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_i)-(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i)=(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_i)-(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{x}_i)=0$ となり $k+1$ でも成立している。証明中 1 次独立性を用いていない様に見えるがそうではない。$\boldsymbol{x}'_i$ を作ったとき一般には $\boldsymbol{x}'_i=\boldsymbol{0}$ である可能性がある。これを排除するのが 1 次独立性である。 ∎

$\boldsymbol{L}$ の正規直交系で基底になっているものを**正規直交基底** (*orthnormal basis*) と呼ぶ。有限次元計量線型空間には基底が存在するので，正規直交基底も存在する事が分かる。

定義 2.17 $\boldsymbol{L}$ を計量線型空間とし，S をその部分集合とする。そのとき

$$S^{\perp}=\{\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}\mid \text{任意の}\boldsymbol{y}\in S\text{ に対し }(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\,\}$$

を S の**直交補空間**という。

演習問題 2.9 直交補空間 $S^{\perp}$ は $\boldsymbol{L}$ の部分空間である事を示せ。

命題 2.18 M を有限次元計量線型空間 $\boldsymbol{L}$ の部分空間とする。このとき次が成立する。

(1) $\boldsymbol{L}=M\oplus M^{\perp}$ が成立する。

(2) $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}=M$ である。

証明 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ を M の基底とする。これにベクトルを $\boldsymbol{v}_{k+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n$ を加えて $\boldsymbol{L}$ の基底を作る。このとき命題 2.16 の方法を用いて $\boldsymbol{L}$ の正規直交基底 $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ を作ることができる。このとき $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ は M の正規直交基底になっている。これから $\boldsymbol{L}=M+M^{\perp}$ かつ $M\cap M^{\perp}=\{\boldsymbol{0}\}$ が分かるので $\boldsymbol{L}=M\oplus M^{\perp}$ が分かる。(2) は (1) から従う。 ∎

演習問題 2.10 M_1,M_2 を有限次元計量線型空間 $\boldsymbol{L}$ の部分空間とするとき，次を示せ。

(1) M_1 の任意の元と M_2 の任意の元が直交しているとき，M_1 と M_2 は**直交する**といい，$M_1\perp M_2$ と書くとき $M_1\perp M_2\Longleftrightarrow M_1\subseteq M_2^{\perp}\Longleftrightarrow M_2\subseteq M_1^{\perp}$ が成立する。

(2) $M_1\subseteq M_2$ ならば $M_2^{\perp}\subseteq M_1^{\perp}$

(3) $(M_1+M_2)^{\perp}=M_1^{\perp}\cap M_2^{\perp}$

(4) $(M_1\cap M_2)^{\perp}=M_1^{\perp}+M_2^{\perp}$

以下では計量線型空間 $\boldsymbol{L}$ は有限次元である事を仮定し，基底としては正規直交基底に限る事にする。$\boldsymbol{L}$ から $\boldsymbol{L}$ への (これを $\boldsymbol{L}$ 上のという) 線型写像を T とする。T に対し次の性質を満たす $\boldsymbol{L}$ 上の線型写像 T^* を T の**随伴写像** (*adjoint mapping*) と呼ぶ：任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{y}))$$

が成立する。

命題 2.19 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ を $\boldsymbol{L}$ の正規直交基底とする。そのとき任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\Phi_S(\boldsymbol{x}), \Phi_S(\boldsymbol{y}))$$

が成立する。ここで $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{L}$ の内積，$(\Phi_S(\boldsymbol{x}), \Phi_S(\boldsymbol{y}))$ は $\boldsymbol{K}^n$ の内積である。

証明 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{x}_n$ とすると $\Phi_S(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \Phi_S(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ となる。ここで $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) = x_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \cdots + x_n(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) = x_1\sum_{i=1}^{n} y_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i) + \cdots + x_n\sum_{i=1}^{n} y_n(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_i) = x_1y_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) + \cdots + x_ny_n(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ となる。一方 $(\Phi_S(\boldsymbol{x}), \Phi_S(\boldsymbol{y})) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ なので等号が成立する。 ∎

命題 2.20 T を $\boldsymbol{L}$ 上の線型写像とし，$S = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ を $\boldsymbol{L}$ の正規直交基底とする。T の S に関する表現行列を A とし，$A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ とする。S に関し A^* で表現される $\boldsymbol{L}$ の線型写像 T' は T の随伴写像になっている。

証明 最初に，任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u})^T\,\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}^T A^T \overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}\overline{\overline{A^T}\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}^T\overline{A^*\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$ が成立する事を確認しておこう。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ に対し命題 2.19 を用いると

$$\begin{aligned}
(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) &= (\varphi_S(T(\boldsymbol{x})), \Phi_S(\boldsymbol{y})) = (A\Phi_S(\boldsymbol{x}), \Phi_S(\boldsymbol{y})) \\
&= (\Phi_S(\boldsymbol{x}), A^*\Phi_S(\boldsymbol{y})) = (\Phi_S(\boldsymbol{x}), T'(\Phi_S(\boldsymbol{y}))) \\
&= (\boldsymbol{x}, T'(\boldsymbol{y}))
\end{aligned}$$

が得られる。 ∎

定義 2.21 $T : \boldsymbol{L} \longrightarrow \boldsymbol{L}$ を線型写像とする。$T = T^*$ が成立するとき**エルミート変換** (*Hermitian transformation*) という。また任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$(T(\boldsymbol{x}), T(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成立するとき**ユニタリー変換** (*unitary transformation*) という。特に $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合**直交変換** (*orthnormal transformation*) という。

正方行列 A に対し $A = A^*$ を満たすとき**エルミート行列** (*Hermitian matrix*) という。また $A^*A = E$ を満たすとき**ユニタリー行列** (*unitary matrix*) という。特に $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ のとき，即ち $A^TA = E$ となるとき**直交行列** (*orthnormal matrix*) という。

演習問題 2.11 線型写像 T の正規直交基底による表現行列を A とするとき次を示せ。
(1) T はエルミート変換 $\Longleftrightarrow$ A はエルミート行列
(2) T はユニタリー変換 $\Longleftrightarrow$ A はユニタリー行列

この節の目標に立ち帰ろう。S を計量線型空間 $\boldsymbol{L}$ の正規直交基底とする。$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ に対し $\boldsymbol{v} = \Phi_S(\boldsymbol{x})$ と置くとき

$$T(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}) \Longleftrightarrow A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$$

であった。線型解析で学んだように λ が $\lambda \in \boldsymbol{K}$ であって固有方程式 $f_A(t) = \det(A - tE) = 0$ の解になるとき A の固有値であった。エルミート行列の場合この制限はいらない事が分かる。

命題 2.22 エルミート行列 A に対し $f_A(t) = 0$ の解 λ は実数である。従ってエルミート行列 A に対し固有値は存在する。

これをエルミート変換の言葉に翻訳すると $\boldsymbol{L} \neq \{\boldsymbol{0}\}$ 上のエルミート変換 T に対しその固有値は存在してそれは実数である。

証明 λ を $f_A(t) = 0$ の解とする。$\boldsymbol{C}^n$ の世界で考えると固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する。このとき $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ であり，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ となる。$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$ より $\lambda = \overline{\lambda}$ が分かる。 ∎

命題 2.23 λ_1, λ_2 を $\boldsymbol{L}$ 上のエルミート変換 T の相異なる固有値とする。$i = 1, 2$ に対し $\boldsymbol{x}_i$ を λ_i に属する固有ベクトルとすると，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交する，即ち $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となる。

証明 $(T(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ であり，$(T(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, T(\boldsymbol{x}_2)) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ より $(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となる。$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ より $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となる。 ∎

命題 2.23 より $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を T の相異なる固有値とし，$E(\lambda_i)$ を λ_i に属する固有空間とすると

$$E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$$

となる。これが $\boldsymbol{L}$ 全体に一致する事を主張するのが次の定理であり，この節の目標であった。

定理 2.24 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を $\boldsymbol{L}$ 上のエルミート変換 T の相異なるすべての固有値とすると

$$\boldsymbol{L} = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$$

が成立する。

証明 $M = (E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k))^\perp$ と置くと $\boldsymbol{L} = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k) \oplus M$ が成立しているので，$M = \{\boldsymbol{0}\}$ を示せばよい。よって $M \neq \{\boldsymbol{0}\}$ と仮定する。最初に $T(M) = \{\, T(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in M \,\} \subseteq M$ を示す。$\boldsymbol{y}'$ を任意の $T(M)$ の元とすると，ある $\boldsymbol{y} \in M$ が存在して $\boldsymbol{y}' = T(\boldsymbol{y})$ となっている。$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y} \in (E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k))^\perp = M$ の元であるから，任意の $\boldsymbol{x} \in E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$ に対し $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$

が成立している。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n$ ($\boldsymbol{x}_i \in E(\lambda_i)$) と書き表しておく。$(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}) = (T(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, T(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{y}, T(\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n)) = (\boldsymbol{y}, T(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + T(\boldsymbol{x}_n)) = (\boldsymbol{y}, T(\boldsymbol{x}_1)) + \cdots + (\boldsymbol{y}, T(\boldsymbol{x}_n)) = (\boldsymbol{y}, \lambda_1 \boldsymbol{x}_1) + \cdots + (\boldsymbol{y}, \lambda_n \boldsymbol{x}_n) = \lambda_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1) + \cdots + \lambda_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n) = \lambda_1 \cdot 0 + \cdots + \lambda_n \cdot 0 = 0$ となるので $\boldsymbol{y}' \in M$ が分かる。ここで T を M に制限したものを $T_1 = T_{|M}$ と置くと T_1 は M 上の線型写像になるが，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ に対し $(T_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T_1(\boldsymbol{y}))$ が成立するのでエルミート変換になっている。命題 2.22 より T_1 には固有値が存在する。T_1 の固有値は T の固有値となる。よってそれは λ_i のどれかになっているが，その固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x} \in M$ は λ_i に属する T の固有ベクトルでもあるので $\boldsymbol{x} \in E(\lambda_i)$ になりこれは矛盾。 ▮

この定理を表現行列の言葉で述べると次の系が得られる。

系 2.25 T を $\boldsymbol{L}$ のエルミート変換とすると $\boldsymbol{L}$ のある正規直交基底 S で表現行列が対角行列になるものが存在する。

証明　正規基底としてすべて固有ベクトルであるものが取れる。それに関する表現行列は対角行列となっている。 ▮

行列の対角化に言い替えると次が得られる。

系 2.26 エルミート行列はユニタリー行列により対角化できる。

証明　n 次ユニタリー行列 A を $\boldsymbol{C}^n$ 上の線型写像と考える。正規直交基底を $S = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ とする。$U = (\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n)$ とおくと U はユニタリー行列になり，$U^{-1}AU$ が対角行列になる。 ▮

系 2.27 実対称行列は直交行列により対角化できる。

証明　n 次直交行列 A を $\boldsymbol{R}^n$ 上の線型写像と考える。正規直交基底を $S = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ とする。$O = (\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n)$ とおくと O は直交行列になり，$O^{-1}AO$ が対角行列になる。 ▮