線型代数続論問題解説 #1

河野

間違いがないように注意はしていますが，間違いを見つけた方は教えてください。解説の仕方が不十分で理解しづらい等の意見があればお寄せ下さい。できれば具体的に指摘していただいた方がありがたいです。改良できる範囲で改良して行きます。イントロでも言ったように，そのものズバリの解答は書きません。しかし実際書きはじめてみるとこれはなかなか難しいものです。

演習問題 1.1　命題 1.2 を証明せよ。

(1) はプリントで示してある。以下も成分に直せば同様にできる。ここでは最初の問題でもあるのですべて解答しておこう。

$\boldsymbol{u} = (u_i), \boldsymbol{v} = (v_i) \in \boldsymbol{K}^n$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ としておく。

(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_i) + (v_i) = (u_i + v_i) = (v_i + u_i) = (v_i) + (u_i) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ となる。ここで実数の和の交換法則を使用している。

(3) $\boldsymbol{0} = (0)$(すべての成分がゼロ) という書き方でもよいが，混乱する場合もあるので，次の記号を導入しておこう。任意の i について $z_i = 0$ と定義し，$\boldsymbol{0} = (z_i) \in \boldsymbol{K}^n$ と定義する。任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し，$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = (v_i) + (z_i) = (v_i + z_i) = (v_i) = \boldsymbol{v}$ が成立する。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v} = (v_i)$ に対し $\boldsymbol{v}' = (-v_i)$ とおくと，$\boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{K}^n$ であり，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}' = (v_i)+(-v_i) = (v_i + (-v_i)) = (z_i) = \boldsymbol{0}$ となる。

(5) $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\left((u_i) + (v_i)\right) = \alpha(u_i + v_i) = (\alpha(u_i + v_i)) = (\alpha u_i + \alpha v_i) = (\alpha u_i) + (\alpha v_i) = \alpha(u_i) + \alpha(v_i) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$ となる。成分を表す括弧と積の括弧の違いに注意する事。違いが分からない人はよく考えてください。

(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = (\alpha+\beta)(v_i) = ((\alpha + \beta)v_i) = (\alpha v_i+\beta v_i) = (\alpha v_i)+(\beta v_i) = \alpha(v_i)+\beta(v_i) = \alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$ 括弧に関しては前問と同じく注意。

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = (\alpha\beta)(v_i) = ((\alpha\beta)v_i) = (\alpha(\beta v_i)) = \alpha(\beta v_i) = \alpha\left(\beta(v_i)\right) = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$ 括弧に関しては前問・前々問と同じく注意。

(8) $1\boldsymbol{v} = 1(v_i) = (1v_i) = (v_i) = \boldsymbol{v}$

演習問題 1.2　例 1.3 の例が線型空間になる事をチェックせよ。

定義 1.4 の 8 つが成立する事を示せばよい。どれでもよいが (15) を示しておく。残りは各自にまかせる。

$V = \{y \mid\ y'' - y' - 2y = 0\}$ であった。V の元は微分方程式 $y'' - y' - 2y = 0$ の解関数全体である。$f, g, h \in V$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ とする。関数 F, G に対して $F = G$ を示すには定義域に含まれる任意の x に対して $F(x) = G(x)$ が成立する事を示せばよい。

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ が和の定義だった。任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $((f + g) + h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$ が成立するので，$(f + g) + h = f + (g + h)$ が成立する。これは微分方程式の解関数でなくても一般の関数の場合に成立する。

(2) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$ が成立するので，$f+g = g+f$ が成立する。これは微分方程式の解関数でなくても一般の関数の場合に成立する。
(3) 恒等的に 0 をとる関数を z と表す[1]。即ち任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $z(x) = 0$ が成立しているとする。z の導関数 z' も同じく z なので，z は微分方程式の解関数となっており，$z \in V$ が分かる。任意の関数 $f \in V$ に対し $(f+z)(x) = f(x)+z(x) = f(x)+0 = f(x)$ が成立するので，$f+z = f$ となる。
(4) $f \in V$ に対し $\widetilde{f} = (-1)f$ とおく (定義 1.4 に記号を合わせて f' と書きたいのだが，それでは導関数と間違えるので)。任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $(f+\widetilde{f})(x) = f(x)+\widetilde{f}(x) = f(x)+(-1)f(x) = 0 = z(x)$ となるので，$f+\widetilde{f} = z$ となる。
(5) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $(\alpha(f+g))(x) = \alpha\left((f+g)(x)\right) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x)+\alpha g(x) = (\alpha f)(x)+(\alpha g)(x) = (\alpha f+\alpha g)(x)$ となるので，$\alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g$ が成立する。
(6) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x)+\beta f(x) = (\alpha f)(x)+(\beta f)(x) = (\alpha f+\beta f)(x)$ となるので，$(\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f$ が成立する。
(7) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha((\beta f)(x)) = (\alpha(\beta f))(x)$ となるので，$(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$ が成立する。
(8) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $(1f)(x) = 1(f(x)) = f(x)$ となるので，$1f = f$ が成立する。

演習問題 1.3　次を示せ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ がゼロベクトルの性質を持てば $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$ である。(これからゼロベクトルは唯 1 つである事が分かる)

(2) $\boldsymbol{v}$ に対し逆元の性質をもつベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が存在すれば $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}'(= -\boldsymbol{v})$ である。(これから逆元は唯 1 つである事が分かる)

(3) ある 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ が成立すれば $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ である。

成分表示されたベクトルに関してだけではないので，成分表示を用いたものは証明にならない。定義 1.4 の 8 個の公理のみから導く事がポイントである。
(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ は任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}$ という性質を持っているとする。特に $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とすると，$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$ が成立する。また $\boldsymbol{0}$ の性質より $\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_0$ となる。よって $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$ となる。
(2) $\boldsymbol{v}_1$ は $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ という性質をもっているとする。$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)+\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}'$ となり成立している。
(3) $\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$ である事を確認しておく。$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ が成立しているとき，左から $\boldsymbol{v}'$ を加えると $\boldsymbol{v}'+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる。この左辺は $\boldsymbol{v}'+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$ となるので，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ となる。

演習問題 1.4　線型空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ と任意のスカラー α に対し次が成立する事を示せ。
(1) $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$　　(2) $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
(3) $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

[1] 恒等的に 0 である関数を 0 と書く場合もあるが，ここでは z と書いた。その記法でいうと，元の微分方程式は $y''-y'-2y = z$ と書かれる。

前問の結果があるので，あるベクトル $\boldsymbol{w}$ が $-\boldsymbol{v}(=\boldsymbol{v}')$ である事を示すには $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ を示せばよいし，あるベクトル $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{0}$ ある事を示すためには，あるベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ が成立する事を示せばよい。前問を考えたものは考え方に慣れてきたであろうから，これをヒントに各自試みよ。