線型代数続論問題解説 #2

河野

演習問題 1.5　命題 1.7 を証明せよ。

線型写像の定義にある 2 つの性質の成立をチェックすればよい。(1) と (4) のみ示すので，残りは各自証明する事。

(1)　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し $\mathrm{id}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \mathrm{id}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{id}(\boldsymbol{y})$ が成立する。また任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $\mathrm{id}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x} = \alpha\,\mathrm{id}(\boldsymbol{x})$ が成立しているので，id は線型写像である。

(4)　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ に対し $(T_1+T_2)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + T_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T_1(\boldsymbol{x}) + T_1(\boldsymbol{y}) + T_2(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{y}) = T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}) + T_1(\boldsymbol{y}) + T_2(\boldsymbol{y}) = (T_1+T_2)(\boldsymbol{x}) + (T_1+T_2)(\boldsymbol{y})$ が成立する。また任意の $\boldsymbol{x} \in U$ と任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $(T_1+T_2)(\alpha\boldsymbol{x}) = T_1(\alpha\boldsymbol{x}) + T_2(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T_1(\boldsymbol{x}) + \alpha T_2(\boldsymbol{x}) = \alpha\left(T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x})\right) = \alpha(T_1+T_2)(\boldsymbol{x})$ が成立しているので，T_1+T_2 は線型写像である。

演習問題 1.6　$\mathrm{Hom}(U,V)$ が線型空間になる事を示せ。

命題 1.7 で定義した線型写像の和及びスカラー倍が定義 1.4 の 8 つの条件を満たすことをチェックすればよい。

(1) (結合法則) 任意の $T_1, T_2, T_2 \in \mathrm{Hom}(U,V)$ に対し $(T_1+T_2)+T_3 = T_1+(T_2+T_3)$ を示す。そのためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $\left((T_1+T_2)+T_3\right)(\boldsymbol{x}) = \left(T_1+(T_2+T_3)\right)(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。実際 $\left((T_1+T_2)+T_3\right)(\boldsymbol{x}) = (T_1+T_2)(\boldsymbol{x}) + T_3(\boldsymbol{x}) = (T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x})) + T_3(\boldsymbol{x}) = T_1(\boldsymbol{x}) + (T_2(\boldsymbol{x}) + T_3(\boldsymbol{x})) = T_1(\boldsymbol{x}) + (T_2+T_3)(\boldsymbol{x}) = \left(T_1+(T_2+T_3)\right)(\boldsymbol{x})$ となり成立している。

(2) (交換法則) 任意の $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(U,V)$ に対し $T_1+T_2 = T_2+T_1$ を示す。そのためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $(T_1+T_2)(\boldsymbol{x}) = (T_2+T_1)(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。実際 $(T_1+T_2)(\boldsymbol{x}) = T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}) = T_2(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}) = (T_2+T_1)(\boldsymbol{x})$ となり成立している。

(3)　命題 1.7(2) の線型写像 O がこの性質を事を示す。任意の $T \in \mathrm{Hom}(U,V)$ に対し $T+O = T$ を示す。そのためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $(T+O)(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。実際 $(T+O)(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + O(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{0} = T(\boldsymbol{x})$ となり成立している。

(4)　任意の $T \in \mathrm{Hom}(U,V)$ に対し $T' = (-1)T$ とおく。これが (4) の性質をもつ事を示す。即ち $T+T' = O$ を示す。そのためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $(T+T')(\boldsymbol{x}) = O(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。実際 $(T+T')(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + T'(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + ((-1)T)(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + (-1)(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0} = O(\boldsymbol{x})$ となり成立している。

(5) (分配法則) 任意の $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(U,V)$ と任意のスカラー $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $\alpha(T_1+T_2) = \alpha T_1 + \alpha T_2$ を示せばよい。そのためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $\left(\alpha(T_1+T_2)\right)(\boldsymbol{x}) = \left(\alpha T_1 + \alpha T_2\right)(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。実際 $\left(\alpha(T_1+T_2)\right)(\boldsymbol{x}) = \alpha\left((T_1+T_2)(\boldsymbol{x})\right) = \alpha\left(T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x})\right) = \alpha(T_1(\boldsymbol{x})) + \alpha(T_2(\boldsymbol{x})) = (\alpha T_1)(\boldsymbol{x}) + (\alpha T_2)(\boldsymbol{x}) = \left(\alpha T_1 + \alpha T_2\right)(\boldsymbol{x})$ となり成立してる。

(6) (分配法則) 任意の $\in \mathrm{Hom}(U,V)$ と任意のスカラー $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ に対し $(\alpha+\beta)T = \alpha T + \beta T$ を示せばよい。そのためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $\left((\alpha+\beta)T\right)(\boldsymbol{x}) = \left(\alpha T + \beta T\right)(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。実際 $\left((\alpha+\beta)T\right)(\boldsymbol{x}) = (\alpha+\beta)T(\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x}) + \beta T(\boldsymbol{x}) = (\alpha T)(\boldsymbol{x}) + (\beta T)(\boldsymbol{x}) = \left(\alpha T + \beta T\right)(\boldsymbol{x})$ となり成立している。

(7)　任意の $\in \mathrm{Hom}(U,V)$ と任意のスカラー $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ に対し $(\alpha\beta)T = \alpha(\beta T)$ を示せばよい。

そのためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $((\alpha\beta)T)(\boldsymbol{x}) = (\alpha(\beta T))(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。実際 $((\alpha\beta)T)(\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)T(\boldsymbol{x}) = \alpha(\beta T(\boldsymbol{x})) = \alpha(\beta T)(\boldsymbol{x}) = (\alpha(\beta T))(\boldsymbol{x})$ となり成立している。
(8)　任意の $T \in \mathrm{Hom}(U, V)$ に対し $1T = T$ を示せばよい。そのためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $(1T)(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x})$ を示せばよい。実際 $(1T)(\boldsymbol{x}) = 1T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x})$ となり成立している。

演習問題 1.7　上の事実の残りの部分を証明せよ。

(2)　線形解析で学んだ様に $T_A : \boldsymbol{K}^n \longrightarrow \boldsymbol{K}^m$ が同型写像なら 2 つのベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K}^m$ の次元は等しくなり，$m = n$ が出る。よって $m \neq n$ のとき T_A は同型写像にならない。よって $m = n$ を仮定する。

最初に A が正則行列のとき T_A が同型写像である事を示す。A は正則行列であるから A の逆行列 A^{-1} が存在する。$T_A(\boldsymbol{x}) = T_A(\boldsymbol{y})$ とすると，$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}$ となっている。よって左から A^{-1} をかけて $A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{y}$ となり，$E\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{y}$ 即ち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ となり T_A が一対一写像である事が分かる。次に上への写像である事を示す。任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$ とおくと $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = A\left(A^{-1}\boldsymbol{y}\right) = \left(AA^{-1}\right)\boldsymbol{y} = E\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$ となり T_A が上への写像である事が分かる。

逆に T_A が同型写像であると仮定する。$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{K}^n$ の基本ベクトルとする。同型写像なので各 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対し $\boldsymbol{e}_i = T_A(\boldsymbol{b}_i)$ となるベクトル $\boldsymbol{b}_i$ が存在する。$B = (\,\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n\,)$ とおくと，$AB = A(\,\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n\,) = (\,A\boldsymbol{b}_1 \cdots A\boldsymbol{b}_n\,) = (\,T_A(\boldsymbol{b}_1) \cdots T_A(\boldsymbol{b}_n)\,) = (\,\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n) = E$ となり，B が A の逆行列である事が分かる。よって A は正則行列である。

(3)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$ とし，$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$ とする。$T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$T(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ なので $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ が成立している。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ という事から $x_1 + x_2 + x_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 0$ が成立している。よって $y_3 = -y_1 - y_2 = -x_1 - x_2 = x_3$ となり，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 即ち T は一対一写像である。任意の $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対し $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -y_1 - y_2 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x} \in U$ であり，$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ となる。よって T は上への写像である。
(4)　結論は A が正則のとき T 及び S は同型写像であり，正則でないとき T 及び S は同型写像でない。T に関してのみ証明する。A が正則のとき B を A の逆行列とする。$X, Y \in M(2; \boldsymbol{K})$ に対し $T(X) = T(Y)$ が成立しているとする。$AX = AY$ に左から B をかけると $B(AX) = B(AY)$ より $(BA)X = (BA)Y$ 即ち $X = Y$ を得る。よって T は一対一写像である。任意の $Y \in M(2; \boldsymbol{K})$ に対し $X = BY$ とおくと $T(X) = AX = A(BY) = (AB)Y = EY = Y$ となり上への写像である事が分かる。以上により T は同型写像である。

逆に T が同型写像のとき A が正則である事を示す。$E \in M(2; \boldsymbol{K})$ なので，ある行列 $B \in M(2; \boldsymbol{K})$ が存在して $E = T(B)$ となる。このとき $E = T(B) = AB$ なので，B は A の逆行列である。よって A は正則行列である。
(5)　$D : \boldsymbol{R}[x] \longrightarrow \boldsymbol{R}[x]$ は上への写像ではあるが，一対一写像ではない。$D(1) = D(0)$ だが $1 \neq 0$ なので一対一でない事は分かる。任意の $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \boldsymbol{R}[x]$ に対し $F(x) = \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \cdots + \dfrac{a_1}{2}x^2 + a_0 x$ とおくと，$D(F(x)) = f(x)$ となるので上への写像になる。

$D : \boldsymbol{R}_n[x] \longrightarrow \boldsymbol{R}_n[x]$ は上への写像でもないし，一対一写像でもない。$D(1) = D(0)$ かつ $1 \neq 0$

は前と同じである。$D(g(x))$ の次数は $g(x)$ の次数から 1 を引いたものなので，$D(g(x))$ の次数は $n-1$ 以下である。$f(x)$ を次数 n の多項式とすると $D(F(x))=f(x)$ となる多項式 $F(x)$ は $\boldsymbol{R}_n[x]$ には存在しない。

(7) $\boldsymbol{a}=\{a_i\},\boldsymbol{b}=\{b_i\}$ を $a_1=0,b_1=1$ とし，$i\geqq 2$ にたいしては $a_i=b_i=0$ とする。$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ ではあるが $S(\boldsymbol{a})=S(\boldsymbol{b})$ となっているので $S:\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})\longrightarrow\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ は一対一ではない。任意の $\boldsymbol{b}=\{b_i\}\in\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ に対し $a_1=0,\ a_i=b_{i-1}\ (i\geqq 2)$ とおくと $S(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$ となるので，S は上への写像である。

$S':\mathrm{Fib}\longrightarrow\mathrm{Fib}$ は同型写像である。まず一対一。$\boldsymbol{a}=\{a_i\},\boldsymbol{b}=\{b_i\}\in\mathrm{Fib}$ とする。$S'(\boldsymbol{a})=S'(\boldsymbol{b})$ とすると $i\geqq 2$ に対し $a_i=b_i$ が成立する。Fib に入る事から $a_1+a_2=a_3$ 及び $b_1+b_2=b_3$ が成立している。よって $a_1=a_3-a_2=b_3-b_2=b_1$ から $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ が分かる。次に上への写像。任意の $\boldsymbol{b}=\{b_i\}\in\mathrm{Fib}$ に対し $\boldsymbol{a}=\{a_i\}$ を次のように定義する；$i\geqq 2$ に対し $a_i=b_{i-1}$，$a_1=a_3-a_2$。このとき $\boldsymbol{a}\in\mathrm{Fib}$ であり，$S'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$ となる。

(8) ここでは $X=\boldsymbol{R}$ として考えよう。$D(1)=D(0)$ かつ $1\neq 0$ なので D は一対一でない。また任意の $f(x)\in C^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{C})$ に対し $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(x)dx$ とおくと $D(F)=f$ となるので，D は上への写像である。

S は一対一であるが上への写像ではない。$f(x),g(x)\in C^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{C})$ に対し $S(f)=S(g)$ とすると，任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対し $xf(x)=xg(x)$ である。$x\neq 0$ のときは x で割る事で $f(x)=g(x)$ が分かる。また $f(0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)$ から $f=g$ が得られる。S が上への写像であるとすると，定数関数 1 に対し $S(f)=1$ となる $f(x)\in C^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{C})$ が存在する。このとき任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対し $xf(x)=1$ となる。所が $x=0$ を代入して $0=1$ を得るので矛盾。よって S は上への写像でない。