線型代数続論問題解説 #3

河野

演習問題 1.8 線型空間 V の部分空間 W が V の演算に関して線型空間になることを示せ。

線型空間になるためには定義 1.4 の 8 つの性質を持てばよかった。(1),(2) 及び (5)–(8) は V という全体集合上で成立しているので，その部分集合である W 上でも成立している。よって実際に示さなければいけないのは (3),(4) である。
(3) $\mathbf{0} \in W$ を示せばよい。W は空集合でないので W はあるベクトル $\boldsymbol{w}_0$ を含む。$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{w}_0$ であるが，部分空間の性質より $\mathbf{0} \in W$ となる。
(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{w} \in W$ に対し $-\boldsymbol{w} \in W$ を示せばよい。ここでは $-\boldsymbol{w} = (-1)\boldsymbol{w}$ はすでに示されているものとする (これを仮定しない場合は，この事実の証明も必要)。このとき部分空間の性質より $(-1)\boldsymbol{w} \in W$ となるので $-\boldsymbol{w} \in W$ となる。

演習問題 1.9 前節で残していた問題であるが，T を V から U への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(T) < U$, $\mathrm{Ker}(T) < V$ を示せ。

問題を証明する前に次の事実を示しておく。『T を V から U への線型写像とすると $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である。』$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$ となる。両辺から $T(\mathbf{0})$ を引くと $T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0})$ 即ち $\mathbf{0} = T(\mathbf{0})$ を得る。

$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(T)$ が分かり $\mathrm{Ker}(T) \neq \emptyset$ である。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ とすると $T(\boldsymbol{v}_1) = \mathbf{0}, T(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}$ が成立している。このとき $T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ より $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ となる。また任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ と任意のスカラー $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $T(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ となるので $\alpha\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ となり $\mathrm{Ker}(T)$ が V の部分空間である事が分かる。
$\mathbf{0} = T(\mathbf{0})$ より $\mathbf{0} \in \mathrm{Im}(T)$ となり $\mathrm{Im}(T) \neq \emptyset$ となる。$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathrm{Im}(T)$ に対しベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ で $\boldsymbol{u}_1 = T(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{u}_2 = T(\boldsymbol{v}_2)$ となるものが存在する。このとき $T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ となるので $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in \mathrm{Im}(T)$ となる。また任意のベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(T)$ と任意のスカラー $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し，$\boldsymbol{v} \in V$ で $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{v})$ となるものが存在するので，$T(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u}$ となるので $\alpha\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(T)$ となる。よって $\mathrm{Im}(T)$ は U の部分空間である。

演習問題 1.10 例 1.11 を証明せよ。

定義 1.10 の 3 条件をチェックすればよい。ここでは (5) のみ示しておく。恒等的に 0 となる関数を $z = z(x)$ とする。$z' = z$ なので任意の自然数 n に対し $z^{(n)} = z$ である。よって z は微分方程式 $L : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$ の解関数になっている。$z \in \mathrm{De}(L)$ なので $\mathrm{De}(L) \neq \emptyset$ となる。$y_1, y_2 \in \mathrm{De}(L)$ とする。$(y_1 + y_2)' = y_1 + y_2'$ なので任意の自然数 n に対し $(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}$ が成立する。このとき $(y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1}(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \cdots + a_1(y_1 + y_2)' + a_0(y_1 + y_2) = y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1y_1' + a_1y_2' + a_0y_1 + a_0y_2 = y_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1y_1' + a_0y_1 + y_2^{(n)} + a_{n-1}y_2^{(n-2)} + \cdots + a_1y_2' + a_0y_2 = 0 + 0 = 0$ となり $y_1 + y_2 \in \mathrm{De}(L)$ となる。

$y \in \mathrm{De}(L)$ と任意の実数 $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し $(\alpha y)' = \alpha y'$ なので任意の自然数 n に対し $(\alpha y)^{(n)} = \alpha y^{(n)}$ が成立する。このとき $(\alpha y)^{(n)} + a_{n-1}(\alpha y)^{(n-1)} + \cdots + a_1(\alpha y)' + a_0(\alpha y) = \alpha y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \alpha\left(y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y\right) = \alpha 0 = 0$ となり $\alpha y \in \mathrm{De}(L)$ が成立する。以上により $\mathrm{De}(L)$ は $C^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R})$ の部分空間になる。

演習問題 1.11 $\langle S \rangle$ は $\langle S \rangle = \{ \boldsymbol{x} \in V \mid \exists \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in S, \exists c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{K}, \boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_a + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \}$ と書き表される。

$W = \{ \boldsymbol{x} \in V \mid \exists \boldsymbol{v}_1, \ldots, v_n \in S, \exists c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{K}, \boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_a + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \}$ とするとき，$W = \langle S \rangle$ を示す。そのために (1)W は S を含む部分空間である (2)V の任意の部分空間 U で U が S を含んでいれば $W \subseteq U$ を示せばよい (この理由の分からないものは $\langle S \rangle$ の定義をもう一度よく見る事)。

(1) $\boldsymbol{0} \in W$ なので $W \neq \emptyset$ である。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を W の任意のベクトルとする。このとき S のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_1, \ldots, u_m$ とスカラー $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_m$ が存在して $\boldsymbol{x}_1 = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{x}_2 = d_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + d_m\boldsymbol{u}_m$ となっている。このとき $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n + d_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + d_m\boldsymbol{u}_m$ と書けるので $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W$ となる。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in W$ と任意のスカラー $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し S のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とスカラー $c_1, \ldots, c_n,$ が存在して $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ となっている。このとき $\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha c_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (\alpha c_n)\boldsymbol{v}_n$ と書けるので $\alpha\boldsymbol{x} \in W$ となる。以上により W は部分空間である。W が S を含むのは明らか (何故か?分からないものは理由を考えよ) なので，(1) は証明された。

(2) $\boldsymbol{x}$ を $\langle S \rangle$ の任意のベクトルとする。このとき S のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とスカラー $c_1, \ldots, c_n$ が存在して $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ となっている。このとき $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in U$ となっている。また U は部分空間であるから $c_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, c_n\boldsymbol{v}_n \in U$ となっている。U は部分空間であるから $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in U$ となる。これを用いいると $(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) + c_3\boldsymbol{v}_3 \in U$ となる。以下同様にして (厳密には数学的帰納法)，$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \in U$ が得られ，$\boldsymbol{x} \in U$ となる。以上により (2) は示された。

演習問題 1.12 V の部分空間 U_1, U_2 に対し $U_1 + U_2$ 及び $U_1 \cap U_2$ が V の部分空間になる事を示せ。

部分空間の定義にしたがってチェックすればできるので省略。

演習問題 1.13 V の部分空間 U_1, U_2, U_3 が $U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ かつ $(U_1 \oplus U_2) \cap U_3 = \{\boldsymbol{0}\}$ を満たすとき，$U_2 \cap U_3 = \{\boldsymbol{0}\}$ かつ $U_1 \cap (U_2 \oplus U_3) = \{\boldsymbol{0}\}$ が成立し，$(U_1 \oplus U_2) \oplus U_3 = U_1 \oplus (U_2 \oplus U_3)$ となる。よってこれを $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ と書く。

集合として $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$ は明らかなので，直和の条件のみをチェックする。最初に任意の部分空間 U に対し $\{\boldsymbol{0}\} \subseteq U$ が成立している事を確認しておく。よって $\{\boldsymbol{0}\} \subseteq U_2 \cap U_3$ が成立する。また $U_2 \subseteq U_1 \oplus U_2$ なので $U_2 \cap U_3 \subseteq (U_1 \oplus U_2) \cap U_3 = \{\boldsymbol{0}\}$ となり $U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ となる。

$\{\boldsymbol{0}\} \subseteq U_1 \cap (U_2 \oplus U_3)$ は前と同様に分かるので，逆の包含関係を示す。$U_1 \cap (U_2 \oplus U_3)$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} \in U_1$ かつ $\boldsymbol{x} \in U_1 \oplus U_2$ となっている。$\boldsymbol{x}_2 \in U_2$ 及び $\boldsymbol{x}_3 \in U_3$ が存在し $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ となる。このとき $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x}_2$ となり $\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x}_2 \in U_1 \oplus U_2$ が分かる。$(U_1 \oplus U_2) \cap U_3 = \{\boldsymbol{0}\}$

より $x_3 = \boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ となる。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2$ は $U_1 \cap U_2$ の元なので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{0}\}$ が示された。

演習問題 1.14　Φ_S が同型写像である事を証明せよ。

最初に線型写像になる事を示す。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$ と表したとき $\Phi_S(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \Phi_S(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ となっている。$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{v}_n$ となるので $\Phi_S(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Phi_S(\boldsymbol{x}) + \Phi_S(\boldsymbol{y})$ が成立する。

$\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (\alpha x_n)\boldsymbol{v}_n$ となるので，$\Phi_S(\alpha\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha\Phi_S(\boldsymbol{x})$ が成立する。以上により $|phi_S$ が線型写像である事が分かる。

Φ_S が一対一である事を示すには $\mathrm{Ker}(\Phi_S) = \{\boldsymbol{0}\}$ を示せばよい。$\boldsymbol{x}$ を $\mathrm{Ker}(\Phi_S)$ の任意の元とする。$\Phi_S(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ となる。$\mathrm{Ker}(\Phi_S) \subseteq \{\boldsymbol{0}\}$ が成立する。逆の包含関係は明らかなので Φ_S は一対一である。

$\boldsymbol{K}^n$ の任意のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ とおくと $\boldsymbol{x} \in V$ であり，$\Phi_S(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ となる。よって Φ_S は上への写像である。