

演習問題 1.15

(1) W が線型空間 V の部分空間である事の定義を述べよ。

(2) $V = \mathbf{R}^4$, $W = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \right\}$ とするとき W が V の部分空間である事を示せ。

(3) S が W の基底である事の定義を述べよ。

(4) W の基底 S を自分で選び, それが実際に基底である事を示せ。

これは中間試験に出した問題と同様にできます。分からない人は中間試験の問題の解説を見ながら解いてみてください。それが理解できればこの問題もできると思われます。

演習問題 1.16

(1) $V = C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$, $W = \{y \in V \mid y'' - 4y' + 5y = 0\}$ とするとき W が V の部分空間である事を示せ。

(2) W の基底 S を自分で選び, それが実際に基底である事を示せ。ただし次の定理は使用してよい。

定理 $y'' + ay' + by = 0$ の解関数は初期値 $y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ を 1 つ与えるとただ 1 つ存在する。

これも中間試験に出した問題と同様にできます。分からない人は中間試験の問題の解説を見ながら解いてみてください。それが理解できればこの問題もできると思われます。

演習問題 1.17 例 1.16(8) の Fib の基底 $S = \{x, y\}$ に関するシフト S の表現行列を求めよ。

同じ S では分かりにくかったですね。基底の方を S_0 と記号を変えましょう。 $a = \{a_i\} \in \text{Fib}$ に対し $a = a_1x + a_2y$ となる事が数学的帰納法により証明される。 $S(x)$ の初項は 0, 第 2 項は 1 なので $(x) = 0x + 1y = y$ となる。また $S(y)$ の初項は 1, 第 2 項は 1 なので, $S(y) = x + y$ となる。 $\Phi_{S_0}(x) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_{S_0}(y) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となっている。 $\Phi_{S_0}(S(x)) = \Phi_{S_0}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり, $\Phi_{S_0}(S(y)) = \Phi_{S_0}(x + y) = \Phi_{S_0}(x) + \Phi_{S_0}(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。表現行列を A とすると, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となっているので, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

演習問題 1.18 例 1.22 の (3) と同様な事を 3 次行列について考えよ。即ち A を 3 次行列とする。 K^3 から K^3 への写像 T, T' を $T(X) = AX, T'(X) = XA$ で定義する。 E_{pq} を (p, q) 成分のみ 1 で、他の成分は 0 である行列とする。 $S = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{33}\}$ とするとき、 T 及び T' の S に関する表現行列を求めよ。

例 1.22(3) を理解していない人はそれをまず理解してください。方法はこの例と同じです。ただ 2 次行列が 3 次行列に変わっただけです。

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする。 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $AE_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{21}E_{21} + a_{31}E_{31}$ となる。他の E_{ij} も同様に計算すると T の表現行列 B は

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

となる。 T' の表現行列を C とすると

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

となる。