線型代数続論問題解説 #7

河野

演習問題 2.2　$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}, \alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$ が成立する事を示せ。

次の演習問題で証明する $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を使用した。

$$\begin{aligned} \|\alpha\boldsymbol{x}\|^2 &= (\alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}) \\ &= \alpha\overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \\ &= |\alpha|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 \end{aligned}$$

より得られる。

演習問題 2.3　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}, \alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し次 (共役線型性) が成立する事を示せ。
(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$
(2) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

共役対称性と線型性から出て来る。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) &= \overline{(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})} \\ &= \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} + \overline{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}) &= \overline{(\alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \overline{\alpha}\,\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} \\ &= \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

演習問題 2.4　例 2.9 で述べられた事を証明せよ。

それぞれ定義されたものが内積の性質 (1) 正値性，(2) 共役対称性，(3) 線型性，を満たすことをチェックすればよい。

(3) $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とおくと $B^* = (\bar{b}_j i)$ なので $B^*A = (\sum_{s=1}^{m} \bar{b}_{si}a_{sj})$ となるので $(A, B) = \mathrm{Tr}(B^*A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \bar{b}_{si}a_{si}$ となる。$(A, A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \overline{a}_{si}a_{si} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} |a_{si}|^2 \geqq 0$ となる。$(A, A) = 0$ のとき任意の s, i に対し $|a_{si}| = 0$ 即ち $a_{si} = 0$ となる。よって $A = O$ である。$\overline{(B, A)} = \overline{\mathrm{Tr}(A^*B)} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \overline{a}_{si}b_{si}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} a_{si}\bar{b}_{si} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \bar{b}_{si}a_{si} = (A, B)$ が成立する。正方行列 X, Y に対し $\mathrm{Tr}(X+Y) = \mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(Y)$ が成立する。よって $C = (c_{ij})$ とすると，$(A+B, C) = \mathrm{Tr}(C^*(A+B)) = \mathrm{Tr}(C^*A + C^*B) = \mathrm{Tr}(C^*A) + \mathrm{Tr}(C^*B) = (A, C) + (B, C)$ となる。

(4) $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ に対し $(f(x), f(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i a_i = \sum_{i=0} .a_i^2 \geqq 0$ となる。また

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2 = 0 \Longleftrightarrow a_i = 0 \, (i = 0, \ldots, n)$$

なので $(f(x),f(x))=0$ となるのは $f(x)=0$ のときに限る。$g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ とすると，$(g(x),f(x))=\sum_{i=0}^{n} b_i a_i=\sum_{i=0}^{n} a_i b_i=(f(x),g(x))$ となる。係数は実数なので $\overline{(g(x),f(x))}=(g(x),f(x))$ が成立している。よって $\overline{(g(x),f(x))}=(f(x),g(x))$ が成立する。$h(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i$ と置く。$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$ となるので，

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x),h(x)) &= \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)c_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i c_i+\sum_{i=0}^{n} b_i c_i \\ &= (f(x),h(x))+(g(x),h(x))\end{aligned}$$

となる。$\alpha f(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha a_i)x^i$ なので

$$\begin{aligned}(\alpha f(x),g(x)) &= \sum_{i=0}^{n}(\alpha a_i)b_i \\ &= \alpha\sum_{i=0}^{n} a_i b_i \\ &= \alpha(f(x),g(x))\end{aligned}$$

となる。
(5) 有界な区間上の連続関数全体の内積の方は特に問題はないであろう。実数全体になると広義積分の収束の問題が発生する。ここでは解析的な事実を議論するのが目的ではないので簡単にふれるにとどめる。

$f,g,h\in \boldsymbol{L}=C^0(X,\boldsymbol{K}),\alpha\in\boldsymbol{K}$ とする。$(f,f)=\int_a^b f(x)\overline{f(x)}dx=\int_a^b |f(x)|^2dx\geqq 0$ となる。また連続関数に関しては $f\neq 0$ ならば $(f,f)=\int_a^b |f(x)|^2dx>0$ が知られている。

$$\begin{aligned}\overline{(g,f)} &= \overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)}dx}=\int_a^b \overline{g(x)\overline{f(x)}}dx \\ &= \int_a^b \overline{g(x)}\,\overline{\overline{f(x)}}dx=\int_a^b \overline{g(x)}f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx=(f,g) \\ (f+g,h) &= \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\overline{h(x)}dx=\int_a^b \left\{f(x)\overline{h(x)}+g(x)\overline{h(x)}\right\}dx \\ &= \int_a^b f(x)\overline{h(x)}dx+\int_a^b g(x)\overline{h(x)}dx=(f,h)+(g,h)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha f, g) &= \int_a^b \alpha f(x)\overline{g(x)}dx = \alpha \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \alpha(f, g)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{L} = \left\{ f \in C^0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx < \infty \right\}$ とする。広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ が収束するとき，広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は絶対収束するという。広義積分が絶対収束すれば収束する事は知られている。この事実は証明なしに使用する。最初に内積が定義されることを示す。シュワルツの不等式より

$$
\int_a^b \left| f(x)\overline{g(x)} \right| dx = \int_a^b |f(x)| \left| \overline{g(x)} \right| dx \leqq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx
$$

が成立している。ここで $a \to -\infty, b \to \infty$ とすると，右辺が収束するので左辺が収束する。よって広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$ は収束する。内積の諸性質の証明は有限の範囲で証明しておいて極限をとればよい。線型性の 1) のみ示しておく。$f, g, h \in \boldsymbol{L}$ とする。$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\overline{h(x)}dx = \int_a^b f(x)\overline{h(x)}dx + \int_a^b g(x)\overline{h(x)}dx$ が成立している。ここで $a \to -\infty, b \to \infty$ とすると，$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x) + g(x)\}\overline{h(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{h(x)}dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{h(x)}dx$ 即ち $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ が成立する。

(6) 証明は (5) の前半と全く同じであるので省略する。

(7) 級数 $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ が収束するとき，もとの級数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ は絶対収束するという。級数が絶対収束するとき，収束する事が知られている。最初に内積が定義される事を示す。$\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\} \in \boldsymbol{L} = \left\{ \boldsymbol{x} = \{x_i\} \in \mathrm{Seq}(\boldsymbol{R}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$ に対しシュワルツの不等式より $\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ ここで $n \to \infty$ とすると $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ となり $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束するので，$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ も収束する。内積の諸性質の証明は有限の範囲で証明しておいて極限をとればよい。線型性 1) のみ示しておく。$\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\}, \boldsymbol{c} = \{c_i\} \in \boldsymbol{L}$ とする。$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) c_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i c_i + b_i c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i + \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$ が成立している。$n \to \infty$ とすると，$\sum_{i=1}^{i} nfty\, (a_i + b_i) c_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i + \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$ 即ち $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が成立する。

演習問題 2.5　任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ に対し $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 0$ である事を示せ。間違いですね。$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0$ です。

$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ なので $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$ となる。両辺から $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$ を引くと $0 = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$ を得る。$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ も同様にできる。