線型代数続論問題解説 #8

河野

演習問題 2.6 S が正規直交系のとき 1 次独立系である事を示せ。

$\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\in S$ とする。$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n=\mathbf{0}$ が成立しているとする。各 $i=1,\ldots,n$ に対し $0=(\mathbf{0},\boldsymbol{x}_i)=(a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n,x_i)a_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_i)+\cdots+a_n(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_i)=a_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i)=a_i$ となるので 1 次独立が分かる。

演習問題 2.7 $\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{x}_n$ がお互いに直交するとき

が成立する事を示せ。

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_n\|^2 &= (\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_n)\\
&= (\sum_{i=1}^n\boldsymbol{x}_i,\sum_{j=1}^n\boldsymbol{x}_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i)\\
&= \sum_{i=1}^n(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i)=\|\boldsymbol{x}_1\|^2+\cdots\|\boldsymbol{x}_n\|^2
\end{aligned}
$$

演習問題 2.8 [**ベッセルの不等式**] $S=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n\}$ を正規直交系とする。任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}$ に対し

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1)|^2+|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_2)|^2+\cdots+|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_n)|^2\leqq\|\boldsymbol{x}\|^2$$

が成立する。等号成立は $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ の線型結合で書けるときに限る。

$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1+\cdots+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{x}_n$ とおく。$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=\left(\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i,\sum_{j=1}^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left((\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(x,\boldsymbol{x}_i)\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_j)}\left(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j\right)=\sum_{i=1}^n(x,\boldsymbol{x}_i)\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)}=\sum_{i=1}^n|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)|^2$ 及び $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\boldsymbol{x},\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i\right)=\sum_{i=1}^n\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)=\sum_{i=1}^n|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)|^2$, $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\left(\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}\right)=\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)}=\sum_{i=1}^n|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)|^2$ が成立するので,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2-\sum_{i=1}^n|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)|^2-\sum_{i=1}^n|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)|^2+\sum_{i=1}^n|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)|^2\\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2-\sum_{i=1}^n|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)|^2
\end{aligned}
$$

となる。$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 \geqq 0$ より不等式が成立する。等号成立は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 即ち，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ の線型結合で書けるときに限る。

演習問題 2.9　直交補空間 $S^{\perp}$ は $\boldsymbol{L}$ の部分空間である事を示せ。

$S^{\perp}=\{\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}\mid\ \forall\boldsymbol{y}\in S,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\,\}$ が定義である。S の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{y})=0$ となるので，$\boldsymbol{0}\in S^{\perp}$ となる。よって $S^{\perp}\neq\emptyset$ である。

$S^{\perp}$ の任意のベクトルを $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ とする。任意の $\boldsymbol{y}\in S$ に対し $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})=0,(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})=0$ が成立している。$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})=0+0=0$ となるので $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in S^bot$ となる。

S^bot の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー $\alpha\in\boldsymbol{K}$ に対し，$\boldsymbol{y}\in S$ とすると，$(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha 0=0$ となるので，$\alpha\boldsymbol{x}\in S^{\perp}$ となる。以上により $S^{\perp}$ は $\boldsymbol{L}$ の部分空間になる。

演習問題 2.10　M_1,M_2 を有限次元計量線型空間 $\boldsymbol{L}$ の部分空間とするとき，次を示せ。

(1) M_1 の任意の元と M_2 の任意の元が直交しているとき，M_1 と M_2 は**直交する**といい，$M_1\perp M_2$ と書くとき $M_1\perp M_2\Longleftrightarrow M_1\subseteq M_2^{\perp}\Longleftrightarrow M_2\subseteq M_1^{\perp}$ が成立する。

(2) $M_1\subseteq M_2$ ならば $M_2^{\perp}\subseteq M_1^{\perp}$

(3) $(M_1+M_2)^{\perp}=M_1^{\perp}\cap M_2^{\perp}$

(4) $(M_1\cap M_2)^{\perp}=M_1^{\perp}+M_2^{\perp}$

(1) M_1 と M_2 が直交する事は「$\forall\boldsymbol{x}_1\in M_1,\forall\boldsymbol{x}_2\in M_2\,;(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$」と同値である。「$\forall\boldsymbol{x}_2\in M_2;(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$」と「$\boldsymbol{x}_1\in M_2^{\perp}$」は同値である。よって $M_1\perp M_2\Longleftrightarrow M_1\subseteq M_2^{\perp}$ となる。

「$\forall\boldsymbol{x}_1\in M_1,\forall\boldsymbol{x}_2\in M_2\,;(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$」は「$\forall\boldsymbol{x}_2\in M_2,\forall\boldsymbol{x}_1\in M_1\,;(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$」と同値であり,「$\forall\boldsymbol{x}_1\in M_1\,;(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$」と「$\boldsymbol{x}_2\in M_1^{\perp}$」は同値である。よって $M_1\perp M_2\Longleftrightarrow M_2\subseteq M_1^{\perp}$ となる。

(2) (1) において M_2 を $M_2^{\perp}$ に置き換えると $M_1\perp M_2^{\perp}\Longleftrightarrow M_1\subseteq\left(M_2^{\perp}\right)^{\perp}\Longleftrightarrow M_2^{\perp}\subseteq M_1^{\perp}$ となる。$\left(M_2^{\perp}\right)^{\perp}=M_2$ なので $M_1\subseteq M_2\Longrightarrow M_2^{\perp}\subseteq M_1^{\perp}$ が成立する。

(3) $\boldsymbol{x}$ を $M_1^{\perp}\cap M_2^{\perp}$ の任意のベクトルとする。$\boldsymbol{x}\in M_1^{\perp}$ より任意の $\boldsymbol{y}_1\in M_1$ に対し $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)=0$ となる。同様に任意の $\boldsymbol{y}_2\in M_2$ に対し $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)=0$ となる。M_1+M_2 の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{y}_1\in M_1$ 及び $\boldsymbol{y}_2\in M_2$ が存在して $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$ となる。このとき $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)=0+0=0$ となるので，$\boldsymbol{x}\in(M_1+M_2)^{\perp}$ となる。よって $M_1^{\perp}\cap M_2^{\perp}\subseteq(M_1+M_2)^{\perp}$ が成立する。

$M_1\subseteq M_1+M_2$ より (2) を用いると $(M_1+M_2)^{\perp}\subseteq M_1^{\perp}$ となる。同様に $(M_1+M_2)^{\perp}\subseteq M_2^{\perp}$ となる。よって $(M_1+M_2)^{\perp}\subseteq M_1^{\perp}\cap M_2^{\perp}$ である。以上により $(M_1+M_2)^{\perp}=M_1^{\perp}\cap M_2^{\perp}$ となる。

(4) (3) において M_1,M_2 を $M_1^{\perp},M_2^{\perp}$ に置き換えると $\left(M_1^{\perp}+M_2^{\perp}\right)^{\perp}=\left(M_1^{\perp}\right)^{\perp}\cap\left(M_2^{\perp}\right)^{\perp}$ となる。よって $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}=M$ より $\left(M_1^{\perp}+M_2^{\perp}\right)^{\perp}=M_1\cap M_2$ となる。両辺の $\perp$ をとると $(M_1\cap M_2)^{\perp}=\left(\left(M_1^{\perp}+M_2^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp}=M_1^{\perp}+M_2^{\perp}$ となる。

演習問題 2.11　線型写像 T の正規直交基底による表現行列を A とするとき次を示せ。

(1) T はエルミート変換 $\Longleftrightarrow$ A はエルミート行列

(2) T はユニタリー変換 $\Longleftrightarrow$ A はユニタリー行列

$A = (a_{ij})$ を n 次行列とする。最初に「A がエルミート行列 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})$ が成立する」を示しておく。

A がエルミート行列ならば，任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u})^T\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}^T A^T \overline{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u}^T \overline{\overline{A^T}\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}^T \overline{A^* \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}\overline{A\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})$ が成立する。

逆に任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})$ が成立しているとする。$\boldsymbol{e}_i (i = 1, \ldots, n)$ を基本ベクトルとする。$(A\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ を計算すると A の (j, i) 成分である事が分かる。同様に $(\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j)$ を計算すると A^* の (j, i) 成分である事が分かる。以上により $A = A^*$ となる。S を正規直交基底とするし，$\boldsymbol{u} = \Phi_S(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} = \Phi_S(\boldsymbol{y})$ とする。

$$
\begin{aligned}
T \text{ はエルミート変換} &\Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}; (T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{y})) \\
&\Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}; (\Phi_S(T(\boldsymbol{x})), \Phi_S(\boldsymbol{y})) = (\Phi_S(\boldsymbol{x}), \Phi_S(T(\boldsymbol{y}))) \\
&\Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}; (A\Phi_S(\boldsymbol{x}), \Phi_S(\boldsymbol{y})) = (\Phi_S(\boldsymbol{x}), A\Phi_S(\boldsymbol{y})) \\
&\Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n; (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})) \\
&\Longleftrightarrow A \text{ はエルミート行列}
\end{aligned}
$$

ユニタリーを示すには，同様に「A がユニタリー行列 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$」が成立する事を示し，以下同様に証明を実行すればよい。