$\boxed{\text{数理解析IIテスト (2003–2-18) 解説}}$

河野

試験の解答が欲しいという声が多いので，この解説を作りました。ただし，講義中にも言ったように「正解がどこかにあって，自分の解答とてらしあわせるという事ではなく，自分で正解であると理論的に納得する事が重要なの」で，考え方・基本的やり方のみを述べます。採点でも計算違いは軽微な減点に留めています。

このテストでは 1) 累次積分に直せるか 2) 変数変換ができるかの 2 点を理解しているものは合格としました。逆に言うと不合格だった人はそのどちらか or 両方を理解していないという事になります。$\boxed{1}$で累次積分を

$$I = \int_{-1}^{2}\left\{\int_{-3}^{1} 6xdy\right\}dx$$

としている人はこのままの理解では**絶対**合格しません。$\boxed{2}$で

$$I = \iint_E \sqrt{1-r^2}drd\theta$$

としている人もこのままの理解では**絶対**合格しません。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の重積分について考える。ただし D は $y=-x-1$ と $y=-x^2+1$ で囲まれる領域とする。

$$I = \iint_D 6xdxdy$$

(1) D を縦線形 $(\{\,(x,y)\mid\ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\,\}$ の形のもの$)$ の形で表せ。
(2) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表し，その後 I を求めよ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表すために, 領域 D を 2 つの領域 D_1, D_2 に分ける。自分で D を適当な 2 つの領域 D_1, D_2 に分け，D_1, D_2 を横線形 $(\{\,(x,y)\mid\ c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\,\}$ の形のもの$)$ の形で表せ。
(4) それぞれの領域での積分を x を先にする形の累次積分で表し，この方法で I を計算せよ。

解説

(1) (1) の解説は必要ないでしょう。2 つの曲線の交点を求めれば分かりますね。この様な問題の場合必ず**図示する事**を勧めます。

(2) これが出来ていない人は累次積分 (2 重積分を 1 変数の積分 2 回に直す)　を理解していない人です。一般に積分領域 D が縦線形 $\{(x,y) \mid\ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\}$ で与えられたとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

ですよネ。あとは $a, b, g_1(x), g_2(x)$ に具体的な値・関数を入れるだけです。ただし式の左辺が重積分，右辺が 1 変数の積分である事は理解しておいて下さい。

(3) D が横線形 $\{(x,y) \mid\ c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\}$ の形をしているときは

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy$$

ですネ。これは縦線形の場合と全く同じです。縦線形で積分を求めようとすると，$(c, d$ は求まったとして$)h_1(y), h_2(y)$ を求める事が必要です。$h_2(y)$ は $y = -x^2+1$ から $x^2 = 1-y$ として $x = \pm\sqrt{1-y}$ となり，$x = h_2(y) = \sqrt{1-y}$ である事が分かります。しかし $h_1(y)$ は y の値によって形が違うので領域を 2 つに分ける事が必要になります。$h_1(y) = \begin{cases} -\sqrt{1-y} & y \geqq 0 \\ -y-1 & y < 0 \end{cases}$ となるので，$h_1(y)$ の形から $y \geqq 0$ の部分と $y \leqq 0$ の部分に分ける必要が出てきます。以上から (4) は分かりますね。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の重積分において $x = r\sin\theta, y = r\cos\theta$ とおいて変数変換を考える。

$$I = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \quad D = \{(x,y) \mid\ x^2+y^2 \leqq 1, 0 \leqq x, y \leqq 0\}$$

(1) D に対応する (r,θ)–平面の領域 E を求めよ。

(2) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ。

(3) 変数変換が可能なための条件を満たしている事を示せ。

(4) I を求めよ。

解説

(1) ここでは変数変換を通常の極座標と少し変えてあります。幾何的に考える方法もあるし，計算で調べる方法もあります。r の範囲は $0 \leqq r \leqq 1$ は分かるので，$0 \leqq \sin\theta, \cos\theta \leqq 0$ となる θ の範囲を調べればよい。以上から $E = \{(r,\theta) \mid\ 0 \leqq r \leqq 1, A \leqq \theta \leqq B\}$ となる。A, B は各自決定して下さい。

(2) ヤコビアンは定義にしたがって計算すれば出てきます。これは特に説明する必要はないでしょう。ただし変数変換が通常の極座標と違うので，極座標の場合と結果が異なります。極座標の結果を覚えてきてただ書いている人もいました。これは減点ですネ。

(3) これはできがよくなかった問題です。条件はテキスト p57 注にもあるように，1) 一対一でない部分の面積が 0， 2) ヤコビアンが 0 になる部分が面積確定です。面積 0 の集合は勿論面積確定です。特に 1 番目の条件をチェックしていない解答が多くありました。この場合一対一でない部分は $r = 0$ なので，線分になり，面積 0 です。

(4) この問題は重積分の変数変換がきちんとできるかを見る問題です。この場合

$$I = \iint_E \sqrt{1-r^2} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| drd\theta$$

となるので，あとは計算です。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の 3 重積分について考える。

$$I = \iiint_D zdxdydz \qquad D = \{\, (x,y,z) |\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq x+y \leqq 1, 0 \leqq x+y+z \leqq 1 \}$$

(1) この積分を累次積分の形に変形せよ (具体的な計算は実行しなくてもよい)。

(2) $u = x, v = x+y, w = x+y+z$ とおき変数変換を行う。このとき D に対応する (u,v,w)–空間の領域 E を求めよ。

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ を求めよ。また $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ を求めよ。

(4) I を求めよ。

解説

(1) 2 重積分の場合と同様に領域を
$D = \{\, (x,y,z) |\ 0 \leqq x \leqq 1, -x \leqq y \leqq 1-x, -x-y \leqq z \leqq 1-x-y \}$ の形で書いておく。このとき累次積分はこれらの数・関数が上端・下端にくる形になります。つまり

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_{-x}^{1-x} \left\{ \int_{-x-y}^{1-x-y} zdz \right\} dy \right\} dx$$

ですネ。3 次元だと絵が書きにくいですが，上の様に考えれば間違えないと思います。

(2) E は立方体領域になります。

(3) ヤコビアンは行列式の定義を知っていれば計算できますね。この場合 x, y, z に関して解けますが， $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$ の関係があるので，x, y, z に関して解けない場合もヤコビアンは分かります。これは微分の問題なのだが，この type の間違いが多かったので書いておきます。$v = x+y$ を x で偏微分した結果は $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1+y$ ではありません。この type の間違いをした人は偏微分の部分をもう一度見て下さい。

(4) (1) を直接計算してもいいし，変数変換した立方体領域になっているものを計算してもかまいません。計算途中で $\int 0dx = \int dx$ という間違いをしていた人が少なからずいました。