数理解析 I テスト (2003–7–2) 解答例

河野

試験の解答が欲しいという声が多いので，この解答例を作りました。解答例はあくまでも解答例であり模範解答ではない。一般に数学に模範解答というものはない。以下の解答よりも，より明解な解答，よりエレガントな解答なども充分有り得る。

講義中にも言ったように「正解がどこかにあって，自分の解答とてらしあわせるという事ではなく，自分で正解であると理論的に納得する事が重要なの」で，解答例を丸暗記するのではなく，内容を理解するようにして下さい。

赤で書いてある部分は解答する時の注意事項です。青で書いてある部分は定義・定理等の説明です。黒の部分が解答例です。緑は一人言。

1 K 教師が試験中に「試験ができたものは解答を提出して退室してもよい」と言った所，学生 X はできていないが解答を提出して退室した。この学生 X の行動が論理的に間違っていないか論ぜよ。

解答例： 教師の言明は試験ができたものについて言っているのであり，できていないものに関してなにも言っていない。この行動はこの言明に反している分けではないので，論理的には間違っていない。**ただし**この事は他の担当者にこの様な行動をした場合問題を発生させない事を保障するものではない。

$A \Longrightarrow B$ は A が偽なら常に正しい事に注意する事。今の場合 $A =$「試験ができる」なので上記の様になる。

解答で「できたの判断が人により異なる」事を論拠にした解答が目立ったが，この問題の場合その事は直接は関係がない。

2 学生 X は土木開発学科 1 年のクラスで一番背が高い。この事実を「一番背が高い」という言葉を用いず，代りに「$\cdots$ より背が高い」「存在」「任意」(ただし使用しない用語が存在するかもしれない) という言葉を用いて書け。またこの文の否定について同様に書け。

解答例： 「一番背が高い」=「他の任意の人より背が高い」なので，言い替えると

> 学生 X は土木開発工学科 1 年の学生であり，土木開発工学科 1 年の他の任意の学生より背が高い。

となる。この否定は

> 学生 X は土木開発工学科 1 年の学生でないか，土木開発工学科 1 年には X より背が高いか等しい学生が存在する。

となる。学生 X が土木開発工学科 1 年の学生である事にふれた解答はなかったが，その点はほとんど減点はしていない。「任意」の否定がきちんとできるかが問題。

$\boxed{3}$ $y = \cos x$ の導関数を定義のみを用いて計算せよ。ただし $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h - 1}{h} = 1$ は用いてよい。

解答例： 皆気がついていたと思いますが，ヒントに与えた式が間違っています。$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ ですネ。

定義にしたがって計算するだけです。これをいきなり

$$(\cos x)' = -\sin x$$

としている人は 0 点です。どうしてか分からない人は「定義のみ」という所をよく考えて下さい。定義より $(\cos x)' = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ なので lim の中を変形する。加法定理より $\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \dfrac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \cos x\dfrac{\cos h - 1}{h} - \sin x\dfrac{\sin h}{h}$ となる。ここでいきなり $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$ としている人がいましたがこれはダメ。極限は $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形なので，この形から結論は出ません。$\dfrac{\cos h - 1}{h} = \dfrac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \dfrac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \dfrac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\dfrac{\sin h}{\cos h + 1}\dfrac{\sin h}{h}$ と変形すると，$(\cos x)' = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$
$= -\cos x \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{\cos h + 1}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\sin x$ となる。

$\boxed{4}$ 次の関数の偏導関数を求めよ (諸定理を用いてよい)。

$$z = (x^2 + y^2)^{100}\sin(x^3 + y^3)$$

解答例： これに解説を加える必要はないでしょう。分からない人は微分の基礎から復習する必要があります。積の微分法と合成関数の微分法を使います。

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 100(x^2+y^2)^{99}(2x)\sin(x^3+y^3) + (x^2+y^2)^{100}\cos(x^3+y^3)(3x^2)$
$= 200x(x^2+y^2)^{99}\sin(x^3+y^3) + 3x^2(x^2+y^2)^{100}\cos(x^3+y^3)$ となる。x, y について対称なので $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 100(x^2+y^2)^{99}(2y)\sin(x^3+y^3) + (x^2+y^2)^{100}\cos(x^3+y^3)(3y^2)$
$= 200y(x^2+y^2)^{99}\sin(x^3+y^3) + 3y^2(x^2+y^2)^{100}\cos(x^3+y^3)$ となる。

$\boxed{5}$ 次の関数

$$z = f(x,y) = x, \quad x + y = s, \quad xy = t$$

について以下の問いに答えよ。

(1) ヤコビ行列 $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。　(2) ヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。　(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

解答例： (1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \left(\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1}$ なので $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)} = \dfrac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$

となる。$\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{1}{\frac{\partial s}{\partial x}}$ 等していたものがいた。これは 1 変数関数の場合の逆関数の微分法であり，2 変数以上には適用できない。こんな計算ができるんだったらわざわざヤコビ行列を考える必要などない。

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = 1 \cdot \dfrac{x}{x-y} + 0 \cdot \dfrac{-y}{x-y} = \dfrac{x}{x-y}$

(4) $w = \dfrac{\partial z}{\partial s}$ とおくと $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \dfrac{\partial w}{\partial s}$ である。$\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = \dfrac{-y}{(x-y)^2}\dfrac{x}{x-y} + \dfrac{x}{(x-y)^2}\dfrac{-y}{x-y} = -\dfrac{2xy}{(x-y)^3}$

6 次の関数の極値を求めよ。

$$z = f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2y^2$$

解答例： 極値を与える可能性のあるのは臨界点であるので，まず臨界点を求める。臨界点とはすべての偏導関数が 0 になる点の事。$z_x = 4x^3 + 4xy^2$, $z_y = 4y^3 + 4x^2y - 4y$ なので連立方程式 $4x^3 + 4xy^2 = 0, 4y^3 + 4x^2y - 4y = 0$ の解を求める。$4x^3 + 4xy^2 = 0$ は $x(x^2+y^2) = 0$ となるので，「$x(x^2+y^2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ または $x^2 + y^2 = 0$」である。「$x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ かつ $y = 0$」なので結局「$x(x^2+y^2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$」を得る。これを 2 番目の式に代入すると $y(y^2-1) = 0$ より，$y = 0, \pm 1$ を得る。$(x,y) = (0,0), (0,\pm 1)$ は連立方程式の解になっているので臨界点は $(x,y) = (0,0), (0,\pm 1)$ の 3 点である。臨界点は極値を与える点の候補にすぎない。その点でヘッシャンが正なら極値である事が分かり，負なら極値でない事が分かる。$z_{xx} = 12x^2 + 4y^2$, $z_{xy} = 8xy$, $z_{yy} = 12y^2 + 4x^2 - 4$ なのでヘッシャンは $H(x,y) = z_{xx}z_{yy} - zxy^2 = 16(3x^2+y^2)(3y^2+x^2-1) - 64x^2y^2$ となる。$H(0,\pm 1) = 32 > 0$ なので $(x,y) = (0,\pm 1)$ は極値を与える。$f(0,\pm 1) = -1$ は極値である。

$H(0,0)=0$ なのでヘッシャンでは分からない。極値ではなさそうとあたりをつける。極値でない事を示すには，その点の幾らでも近くに関数値がその点の値より大きくなる点と小さくなる点を見つければよい。$y=0$ 上に $f(x,y)$ を制限して考えると $f(x,0)=x^4$ となる。$w_1=x^4$ は 1 変数関数としては 0 で極小なので $(0,0)$ の幾らでも近くに $f(x,0)>f(0,0)$ となる点が存在する。

$x=0$ 上に $f(x,y)$ を制限して考えると $f(0,y)=y^4-2y^2$ となる。増減表を書くと $w_2=y^4-2y^2$ は 1 変数関数としては 0 で極大である事が分かるので $(0,0)$ の幾らでも近くに $f(0,y)<f(0,0)$ となる点が存在する。よって $(0,0)$ は f の極値を与える点ではない。

以上により $(0,\pm 1)$ において極値 -1 をとる。実際は極小点。

$\boxed{7}$ 次から 1 題選択して解答せよ。

(1) 何回でも微分可能な関数 $y=f(x+h)$ に対し x の周りで近似の度合の最もよい h に関する 3 次式を求めよ。ただし h に関する 3 次式 $y=a+bh+ch^2+dh^3$ が x の周りで近似の度合が最もよいとは $f(x+h)-(a+bh+ch^2+dh^3)=\varepsilon h^3$ と置いたとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon=0$ が成立する事をいう。

(2) x,y,z が正で $x+y+z=a$ ($a>0$ は定数) を満たすとき，x^3y^2z の最大値が存在する事を示し，最大値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)=\log x$ を $x=1$ でテーラー (級数) 展開せよ。

(4) 関数を $z=f(x,y)=\sin(x+y)$ を点 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ においてテーラー展開せよ。ただし $n=4$ とする。

(5) $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ の下で $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ の極値を求めよ。

解答例： (1) $f(x+h)-(a+bh+ch^2+dh^3)=\varepsilon h^3$ において $h\to 0$ とすると f は連続なので (微分可能な関数は連続) $f(x)-a=0$ を得る。よって $a=f(x)$ である。

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=b+ch+dh^2+\varepsilon h^2$ と変形して $h\to 0$ とすると f は微分可能なので $f'(x)=b$ を得る。

$\dfrac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h^2}=c+dh+\varepsilon h$ と変形して $h\to 0$ とする。$\lim_{h\to 0}f(x+h)-f(x)-f'(x)h=0$ なので，左辺はロピタルの定理より $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{2h}=\dfrac{f''(x)}{2}$ となる。ロピタルの定理は $\lim_{x\to a}f(x)=0, \lim_{x\to a}g(x)=0$ のとき $\lim_{h\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が成立するというもの。今の場合 h が変数なので，h で微分していることに注意。よって $\dfrac{f''(x)}{2}=c$ となる。

$\dfrac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h-\dfrac{f''(x)}{2}h^2}{h^3}=d+\varepsilon$ と変形して $h\to 0$ とすると左

辺は $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h-\dfrac{f''(x)}{2}h^2}{h^3} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h)-f'(x)f''(x)h}{3h^2} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f''(x+h)-f''(x)}{6h} = \dfrac{f'''(x)}{6} = d$ となる。よって求める 3 次式は $y = f(x) + f'(x)h + \dfrac{f''(x)}{2}h^2 + \dfrac{f'''(x)}{6}h^3$ である。

(2) x, y, z が条件を満たしながら変化するとき x, y は
$D = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0, x+y < a\}$ の中をすべて動く。よって問題は D 上で w の最大値の存在を示し最大値を求める問題になる。D で考えたのでは最大値の存在が保証されないので，$\overline{D} = \{(x,y) \mid x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq a\}$ 上で $w = x^3y^2(a-x-y)$ の最大値問題を考える。有界閉集合上で定義された連続関数は最大値をとる (最大値定理)。$\overline{D} = \{(x,y) \mid x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq a\}$ は有界閉集合であり，$w = x^3y^2(a-x-y)$ は $\overline{D}$ 上で定義された連続関数なので $\overline{D}$ 上で最大値をとる。最大値をとるのは境界上または内部であるが，内部で最大値をとるとその点は臨界点となっている。以上により，境界上の点と臨界点の値で最も大きいものが最大値を与える。境界 ∂D 上で w の値は 0 である。次に臨界点を求める。$\dfrac{\partial w}{\partial x} = 3x^2y^2(a-x-y) - x^3y^2 = x^2y^2(3a-3x-3y-x) = x^2y^2(3a-4x-3y)$ $\dfrac{\partial w}{\partial y} = x^3y(2a-2x-3y)$ より，臨界点は $x^2y^2(3a-4x-3y) = 0$ かつ $x^3y(2a-2x-3y) = 0$ を満たす (x,y) である。「$x^2y^2(3a-4x-3y) = 0 \iff x = 0$ または $y = 0$ または $3a-4x-3y = 0$」であるが，$x = 0, y = 0$ は境界上の点ですでに処理しているので $3a-4x-3y = 0$ の場合のみ調べればよい。「$x^3y(2a-2x-3y) = 0 \iff x = 0$ または $y = 0$ または $2a-2x-3y = 0$」であるが，$x = 0, y = 0$ は境界上の点ですでに処理しているので $2a-2x-3y = 0$ の場合のみ調べればよい。よって臨界点は $3a-4x-3y = 0, 2a-2x-3y = 0$ を共に満たす点なので $(x,y) = (\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{3})$ である。この点における w の値は $\dfrac{a^6}{432} > 0$ なので，w は $(x,y) = (\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{3})$ において最大値 $\dfrac{a^6}{432}$ をとる。この最大値は D 上の最大値にもなっているので $\dfrac{a^6}{432}$ が求める最大値である。

(3) $f(x)$ を $x = 1$ でテーラー級数展開すると

$$f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_n(x-1)^n + \cdots$$

となっている。ここで $a_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(1)$ である。

$f(x) = \log x$ とすると，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f'''(x) = 2\dfrac{1}{x^3}$ となるので $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{x^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。$n = 1$

のとき成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する，即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\dfrac{1}{x^k}$ を仮定する。両辺を微分すると $f^{(k+1)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(-k)\dfrac{1}{x^{k+1}}=(-1)^{(k+1)-1}((k+1)-1)!\dfrac{1}{x^{k+1}}$ となり $k+1$ でも成立している。よって $n\geqq 1$ のとき $a_n=\dfrac{1}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{1^n}=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ となる。$a_0=\log 1=0$ なので求める級数は

$$\log x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\cdots$$

となる。

(4) $n=4$ の場合の (a,b) における 2 変数テーラー展開は

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)$$
$$+\frac{1}{3!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^3f(a,b)+\frac{1}{4!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^4f(a+\theta h,b+\theta k)$$

となる。

$f(x,y)=\sin(x+y)$ なので $(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})f(x,y)=h\cos(x+y)+k\cos(x+y)=(h+k)\cos(x+y)$ となる。高次導関数は $(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})^2f(x,y)=(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})(h+k)\cos(x+y)=(h+k)(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})\cos(x+y)=(h+k)(-h\sin(x+y)-k\sin(x+y))=-(h+k)^2\sin(x+y)$, $(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})^3f(x,y)=-(h+k)^2(h\cos(x+y)+k\cos(x+y))=-(h+k)^3\cos(x+y)$, $(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})^4f(x,y)=-(h+k)^3(-h\sin(x+y)-k\sin(x+y))=(h+k)^4\sin(x+y)$ となる。$a=\dfrac{\pi}{2},b=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると $\sin(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2})=\sin(\pi)=0$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi)=-1$, $\sin(\dfrac{\pi}{2}+\theta h+\dfrac{\pi}{2}+\theta k)=\sin(\pi+\theta(h+k))=-\sin(\theta(h+k))$ となるので,

$$\sin(h+k+\pi)=-(h+k)+\frac{1}{3!}(h+k)^3-\frac{1}{4!}\sin(\theta(h+k))(h+k)^4$$

を得る。$h=x-\dfrac{\pi}{2},k=y-\dfrac{\pi}{2}$ を用いて書き直すと

$$\sin(x+y)=-(x-\frac{\pi}{2})-(y-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{6}(x+y-\pi)^3-\frac{1}{24}\sin(\theta(x+y-\pi))(x+y-\pi)^4$$

となる。

(5) ラグランジェの未定係数法より $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y)$ とおくと，条件付き極値問題が条件の付かない極値問題に変わる。すなわち $\varphi(x,y) = 1$ の条件の元での $f(x,y)$ の極値を与える点は $\varphi(x,y)$ または $F(x,y,\lambda)$ の臨界点に含まれている。$\mathbf{grad}\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}) = (2x, 2y)$ なので $\mathbf{grad}\varphi = \mathbf{0}$ となる点は条件 $\varphi(x,y) = 0$ を満たさない。$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x + y - 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2y - 2\lambda y$, $\frac{\partial F}{\partial\lambda} = -\varphi(x,y)$ なので $\mathbf{grad}F = \mathbf{0}$ となるのは $2x + y - 2\lambda x = 0$, $x + 2y - 2\lambda y = 0$, $\varphi(x,y) = 0$ を満たす (x,y) である。

これより $(x+y)(3-2\lambda) = 0$, $(x-y)(1-2\lambda) = 0$ が従うので，$\lambda = \frac{1}{2}$ のとき $x + y = 0$, $\lambda = \frac{3}{2}$ のとき $x - y = 0$ を得る。よって $(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ (複合同順ではない) が分かる。解答では求めた値が実際極値である事を示してはいない。この事を示すためには今の場合これらが最大値及び最小値である事を言えばよい。